Math. P.
25

Math. P. 25.

In. 5082

Mathesis pura. Arithmetica. Systemata & methodi 205.

Basedow

R

Ueberzeugende Methode
der
auf das bürgerliche Leben
angewendeten
Arithmetik
zum Vergnügen
der Nachdenkenden
und zur Beförderung
des guten Unterrichts in den Schulen
erleichtert

von
Johann Bernhard Basedow,
Königl. Dänischen Professor der Moral in Altona.

Altona,
bey David Iversen, Königl. priv. Buchh. 1763.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

An die Leser.

Die Gelehrten unserer Zeit haben die Grenzen der Wissenschaften sehr glücklich erweitert. Ein Verstand, der sich selbst fühlt, gefällt sich, wenn auch durch ihn neue Entdeckungen gemacht werden, weit mehr, als wenn er nur Mittel erfinden und anwenden soll, wie der Unterricht in den ersten bekannten Anfangsgründen der Wissenschaften entweder leichter oder fruchtbarer zu machen sey. Grosse Männer entschliessen sich selten zu diesem Geschäfte; und, wenn sie es auch thun, so scheint es oft, daß das Bewußtseyn ihrer eigenen

Stärke sie hindert, sich die Schwäche der Lernenden vorzustellen. Dieses ist eine der Ursachen, um welcher willen die Methoden selten so vortheilhaft sind, als man wünschen und erwarten sollte.

Wie allgemein die Klagen über diesen Mangel sind, beweiset das fast allgemeine Verlangen nach solchen Büchern, welche den Titel von der Methode eines Lehrmeisters haben. Selbst die Uebersetzungen solcher Schriften, so oft sich auch unsere Hofnung davon geirret hat, werden noch immer mit vieler Begierde angenommen.

Ich habe die ersten vernünftigen Jahre meines Lebens mit dem Unterricht einer anfangenden Jugend beschäftiget. Und damals entschloß ich mich, den Versuch anzustellen, wie ich Gott und der Welt dadurch dienen würde, wenn ich einen Theil meiner Lebenszeit, auf die Erfindung und Mittheilung solcher Gedanken wendete, welche die Verbesserung der Methoden, sowohl zur Bildung des Herzens, als zur Aufklärung des Verstandes, theils im Privatunterrichte, theils in öffentlichen

lichen Schulen betreffen. Ich ward willens, ein vollständiges System der Erziehung und des Unterrichts für die Jugend aller Stände zu schreiben, welches nicht nur allgemeine Anweisungen, sondern selbst die Lehrsätze enthalten sollte, die sogar für Studirende bis an die akademischen Jahre zureichend wären. Dieses Unternehmen war deswegen nicht zu kühn, theils weil ich mich zur nöthigen Langsamkeit der Arbeit entschloß, theils weil man viele Hülfsmittel hat, endlich weil ich folgende Anschläge faßte.

Ich wollte in denen Wissenschaften, deren Anfangsgründe zu schreiben oder zu beurtheilen ich nicht Fertigkeit genug hatte, mich des Raths anderer bedienen, nehmlich durch welche Anweisung, Zusätze und Abkürzungen, die der Welt schon mitgetheilten Anfangsgründe, zu dem Zwecke brauchbarer müßten gemacht werden, wenn dieses überhaupt nöthig seyn sollte. Zweytens, würde aber Mangel an solchen Schriften seyn; so wollte ich meine Absicht entweder durch Aufmunterung anderer, oder durch gemeinschaftliche Bemühung erfüllen.

Dieses vollständige System der Erziehung und des Unterrichtes, von dessen Beschaffenheit sich die Leser aus dem zehnten Hauptstücke, oder dem 74= und 75sten Abschnitte der practischen Philosophie für alle Stände, eine zureichende Vorstellung machen können, habe ich nachher niemahls aus dem Sinne gelassen. Allein, andere Arbeiten, welche bey dem Amte auf einer Ritterakademie meine nähere Pflichten waren, haben die Ausführung dieses Vorsatzes bisher verzögert. Doch habe ich so viel daran gearbeitet, daß ich jetzt im Stande bin (wo mir Gott noch Jahre bestimmt hat) in einem jeden einen kleinen Band zn liefern. Die ersten dieser Theile sollen die Anfangsgründe der einzelnen Wissenschaften, oder die Anweisung zum Gebrauche der dahin abzielenden Schriften enthalten. Der letzte soll alles dasjenige sammlen, was überhaupt von der Verbesserung der Erziehung und des Unterrichtes, von der Ordnung der für die Jugend gehörigen Wissenschaften, und von der Einrichtung des Schulwesens nnd der Unterweisung des grossen Haufens, noch zu erfinden, zu überlegen,

und

und denenjenigen, welche die Erziehung und den Unterricht ausüben, zu empfehlen ist.

Weil die Rechenkunst keine andere Kenntnisse voraussetzet; so hat mich ein geringer Anlaß überredet, diesen kleinen Band von der auf das bürgerliche Leben angewendeten Arithmetik zuerst bekannt zu machen, ob gleich diese Wissenschaft weder die erste seyn muß, noch die angenehmste ist, und ob ich gleich nur wenig Gelegenheit darbey gehabt habe, zu zeigen, was ich in den andern Wissenschaften zum Besten der Jugend zu thun versuchen werde.

Wenn ein Lehrer der Rechenkunst mit solchen Schülern beschäftigt ist, die mit einer geringen Fähigkeit dennoch in größter Eile nur so viel rechnen lernen, als man zur gemeinen Oekonomie, oder zu einer sehr eingeschränkten Handlung für zureichend hält; so wird ihm dieses methodische Buch wenig helfen. Denn ein solcher Schüler muß ohne Einsicht glauben, sein Facit werde richtig, wenn er so verfährt, wie sein Lehrer ihm vorschreibt. Und die Fertigkeit der Ausübung

ist bey einem solchen Unterrichte fast der einzige Zweck.

Aber die meisten, auch unter denenjenigen, welche einer ausgebreiteten Handlung gewidmet sind, oder hernach studiren sollen, lernen von den ersten Informatoren der Rechenkunst nichts weiter als dieses. Bey einem solchen Verfahren entbehren sie aller Vortheile, welche sie von der wahren Einsicht in die Arithmetik haben würden. Sie müssen ohne diese Einsicht viele Jahre herdurch unaufhörlich Exempel berechnen, um durch viele Ausübung ein dunkeles Gefühl derjenigen arithmetischen Wahrheiten zu bekommen, welche durch eine methodische Lehrart ihnen weit leichter und in kürzerer Zeit mitgetheilet würden. Die Arithmetik ist wegen ihrer Beschaffenheit das beste Mittel, den Verstand zu schärfen; aber sie hört es fast auf zu seyn, wenn der Schüler, wie gemeiniglich geschicht, die Lehrsätze durch die blosse Autorität für wahr annimt. Wer so unterrichtet ist, wird sich niemals in solchen Fällen selbst zu helfen wissen, welche neu sind, oder wegen des Ausdruckes neu scheinen, und wovon er in seinem Exempelbuche

keine

keine Muster hat. Soll er aber hernach selbst in der Rechenkunst unterweisen, (welches doch von vielen Unstudirten geschicht); so wird er zwar mit den Zahlen so viel umgehen, daß er die arithmetischen Wahrheiten selbst fühlen lernet: Aber dadurch allein wird er nicht geschickt, seine Einsichten, die er kaum auszudrücken weiß, andern mitzutheilen, oder die Autorität eines Zeugnisses, in der Arithmetik auf die vortheilhafteste Art für diejenigen Schüler zu brauchen, die sich darauf verlassen sollen. Man sieht wohl, daß ich dieser getadelten Methode der Arithmetik diejenige entgegen setze, nach welcher der Lernende keinen Schritt thut, ohne durch Aussicht in die Gegend, woher er kömmt und wohin er will, selbst zu wissen, daß er auf dem rechten Weje sey. Dieses ist die unaffectirte mathematische Methode, welcher ich in dieser Anweisung sehr sorgfältig gefolgt bin.

Wir haben, wie man doch denken sollte, keinen Ueberfluß an solchen Anweisungen. Denn in den kurzen Aufangsgründen der

Mathesis, hat man sich selten bis zur wahren Deutlichkeit der ersten Regeln, welche die vier Species und die Proportionalrechnung betreffen, erniedriget, und überdem hat man sich darinnen zn wenig bemüht, den nöthigen Rath zu ertheilen, wie die Anwendung derselben auf diejenigen Commerzfragen zu machen sey, deren Berechnung vorauszusetzende Erkenntnisse erfordert.

Hiedurch wird der Studirende gleichsam gezwungen, zweymal rechnen zu lernen, mechanisch von dem Schreibmeister, und durch Einsicht, von dem Professor der Mathematik. Jene Art des Unterrichts gelingt weniger, weil diese fehlt; und die letztere hat hernach den Ekel zu überwinden, ohne welchen viele sich nicht bey denen Gegenständen verweilen, welche ihnen in dem kindlichen Unterrichte zur Plage gemacht waren. Die muntersten Köpfe widmen dem Vortrage des Professors, wenn er die vier Species und die Proportionalrechnung demonstrirt,

(des-

(deswegen weil sie schon alles zu wissen glauben,) nur eine flüchtige und unterbrochene Aufmerksamkeit, wodurch eine solche Lücke in der Erkenntniß bleibt, welche bey dem Fortgange in die zusammenhängende mathematische Wissenschaft, Schwierigkeiten und Fehltritte verursacht.

Die Durchlesung dieses Buchs wird demjenigen, welcher in den ersten Gründen der Rechenkunst fremd ist, die Stelle eines gegenwärtigen Lehrers keinesweges ersetzen. Eine solche Arithmetik müßte ein Foliant seyn, und nur Lesern von unbeschreiblicher Geduld dienen.

Wer aber zu einer mechanischen Fertigkeit im Rechnen gekommen ist, und sowohl Lust als Fähigkeit hat, den Grund der erlernten Rechnungsarten einzusehen, der wird ohne einen andern Lehrer, wenn er selbst Fähigkeit und Geduld genug hat, durch dasjenige Nachdenken, wozu ihm dieses Buch

Gelegen-

Gelegenheit giebt, zu seinem Zwecke gelangen.

Meine vorzüglichste Absicht aber ist, den besondern und öffentlichen Lehrern der Rechenkunst ein Buch in die Hände zu geben, worinnen das Vornehmste von demjenigen vorgetragen ist, was erfordert wird, denen nicht zu unvermögenden, und nicht zu eilfertigen Schülern, die wahre Einsicht in die Arithmetik zu verschaffen, und sie, besonders wenn der Lehrer die ihm nöthig scheinenden Verbesserungen und Zusätze beyfügt, weit eher und auch leichter, als nach der gewöhnlichen Weise, auf die Stuffen der Vollkommenheit zu bringen.

Ich sage weit leichter, nicht für den Lehrer, sondern für den Lernenden. Denn ich schreibe nicht für diejenigen Informatoren, welche darüber mit mir nicht einig sind, daß es eines Lehrers Schuldigkeit sey, alle Mühe von dem Schüler auf sich selbst zu nehmen,

wenn

wenn dieser Tausch in der Arbeit, den Unterricht entweder geschwinder oder fruchtbarer macht.

Der Nutzen des Unterrichts wird sehr befördert werden, durch das Examen, ob das Vorgetragene oder Gelesene völlig verstanden, und mit Einsicht als wahr angenommen sey. Dieses Examen habe ich durch die beygefügten Fragen über die Paragraphen erleichtert.

Ich hoffe in der Wahl einiger sehr brauchbaren arithmetischen Kunstwörter, durch welche man hernach viele Worte erspart, und viele Deutlichkeit gewinnt, oft glücklich gewesen zu seyn. Und um ihrentwillen habe ich Recht, Verzeihung zu erwarten, wenn ich nicht allemal glücklich gewesen bin. Das Register wird denjenigen, der die Bedeutung solcher Wörter nicht gelesen, oder vergessen hat, allemal dahin weisen, wo die Erklärung steht.

Ich

Ich war Anfangs willens, die reine Algebra, die mit Zahlen ohne Anwendung auf die Linien umgeht, zugleich vorzutragen. Ich habe aber Ursache gefunden, das Letzte künftig in einem besondern Bändchen zu thun. In dem gegenwärtigen Theile würden einige Anmerkungen und Berechnungen ihren Platz nicht bekommen haben, wenn dieser Vorsatz vor dem Anfange des Drucks wäre geändert worden. Die Zusätze zu den Paragraphen, welche vor dem Register befindlich, werden diese Stellen besonders anzeigen, damit man diejenigen, welche keiner Algebra bedürfen, nicht vergebens aufhalte.

Die Vortheile und die Richtigkeit der Reesischen Columnenrechnung oder Kettenregel habe ich in völliges Licht gesetzt, ob gleich nur einige Blätter damit angefüllet sind.

Eine wohl eingerichtete Rechenschule scheinet mir zweyer Bücher zu bedürfen, erst-

lich einer demonstrativen Anweisung zum Rechnen, welche ich hiemit habe geben wollen; zweytens, eines kleinen Rechenbuchs, worinnen zur Uebung ein Vorrath von Exempeln ist. An der letztern Art haben wir einen Ueberfluß, Es wäre auch rathsam, noch ein drittes Buch daselbst einzuführen, nemlich ein System der Handlungswissenschaften für die Jugend, worinnen allerley Commerzsachen erklärt sind. Wir haben eine solche allgemeine Einleitung in die Handlungswissenschaft von einem Altonaischen Kaufmann, der schon als Schriftsteller beliebt ist, zu hoffen.

Wenn die vernünftigen Lehrer der Arithmetik, den gewöhnlichen Unterricht nach solchen oder ähnlichen Planen verbessern; so wird kein Gelehrter, der es zu heissen verdient, Bedenken haben, sie zu seiner Classe zu rechnen.

Doch ich habe noch etwas von der gegenwärtigen Anweisung zu sagen. Die Noth-

wendig-

wendigkeit bey dem Gebrauche dieſes Buches, ſehr langſam fortzuſchreiten, und vieles vor dem weitern Fortgange oftmals zu wiederholen, iſt eine Folge der eigenthůmlichen Schwierigkeit dieſer Wiſſenſchaft. Eine Geſchichte, eine Moral, eine Philoſophie, muß angenehm und leicht ſeyn, oder ſie hat den Werth nicht, den ſie haben ſoll.

Erstes Hauptstück.

Die allgemeinsten Grundsätze der Rechenkunst.

§. 1.

Es ist höchst wichtig, einem Anfänger sehr deutlich vorzustellen, was man mit dem Worte Eins oder eine Einheit sagen wolle. So oft man nehmlich irgend etwas als ein Ding einer gewissen Art betrachtet, und sich auch andere Dinge von dieser Art vorstellet; so nennt man ein solches Ding ein Eins oder eine Einheit. Ein Pferd ist Eins unter den Pferden, ein Wort ist Eins unter den Worten, ein Thaler ist Eins unter den Thalern, ein Groschen ist Eins unter den Groschen, ein Ey ist Eins unter den Eyern, u. s. f.

§. 2.

Wenn ein Ding grösser als das andere, kleiner als das andere, oder dem andern gleich mit Recht soll genennet werden; so müssen beyde diese Dinge

eine vergleichbare Grösse haben. Ein Groschen hat eine Grösse, eine Stunde hat eine Grösse; aber diese beyden Grössen sind unvergleichbar. Die Stunde ist weder grösser noch kleiner als ein Groschen, auch nicht ihm gleich. Aber die Stunde und das Jahr, haben eine vergleichbare Grösse. Jene ist kleiner als dieses. So ist auch die Grösse von 2 Thalern und einem Dänischen Ducaten mit einander vergleichbar, und jene sind gleich diesem.

§. 3.

Sowohl Eins, als eine Sammlung von Einheiten, heißt eine Zahl. Ein Mensch ist, sofern er Eins ist, eine Zahl; und mehr Menschen, sind gleichfalls eine Zahl. Doch setzt man auch zuweilen eine Zahl, der Einheit entgegen, und sagt, daß das Eins keine Zahl ausmache. Aber in der Rechenkunst braucht man das Wort Zahl so, daß man die Einheit zu der Classe der Zahlen rechnet. Man betrachtet die Dinge, die eine Grösse haben, entweder in dieser ihrer Grösse, oder nur in ihrer Zahl und Vielheit.

Selbst die Zahl oder Vielheit hat eine Grösse. Und, wenn man nur die Grösse der Zahl oder Vielheit betrachtet, so darf man solche Dinge, deren Grösse unvergleichbar ist, nach dieser Zahlengrösse in Vergleichung setzen. Vier Meilen sind, in der Zahl, grösser als drey Thaler.

Es ist aber ausser Zweifel, daß man sowohl gleiche als grössere Einheiten denkt. Ein Thaler ist Eins, ein Groschen ist Eins, dieser

aber

aber ist kleiner als jener. Denn man denkt etwas als Eins, wenn man sich vorstellet, daß man dergleichen Dinge, wenigstens in Gedanken, mehrmahl setzen dürfe. Hieran hindert uns weder die Grösse noch die Kleinheit der Sache. Es lassen sich eben sowohl mehr Tage, als mehr Jahre denken, Darum ist ein Tag eine Einheit eben sowohl, als ein Jahr eine Einheit ist.

Ja man macht selbst eine, aus vielen Einheiten versammlete Zahl, zur Einheit. Z. E. Ein Decher, oder ein Zehnel, ist eine Einheit, weil man sich mehr Zehnel zuweilen vorstellet. In gleicher Bedeutung ist ein Dutzend eine Einheit, ein Schock eine Einheit, ein Hundert, oder ein Tausend eine Einheit, u. s. f.

§. 4.

Eine Zahl, die mehr als Eins, oder weniger als Eins, bedeutet, hat eine andere Bedeutung, wenn jede zum Grunde gelegte Einheit grösser oder kleiner ist, z. E. **Fünf** bedeutet etwas anders, wenn von Dutzenden die Rede ist, als wenn von Schocken die Rede wäre. **Zwey** bedeutet was anders, wenn **Eins** ein Thaler seyn soll, und wenn Eins ein Groschen seyu soll.

§. 5.

Und darum muß man, um recht verstanden zu werden, allemahl, wenn man von Zahlen redet, anzeigen oder bestimmen, was für eine Einheit zum Grunde geleget werden solle.

Wenn dieses angezeigt, oder in unsern eigenen Gedanken fest gesetzt ist; so nennen wir eine solche,

von uns selbst darzu gewählte Sache, eine Einheit im vorzüglichem Verstande, oder kürzer: Die **Principal-Einheit.** Z. E. Wer in Thalern rechnen will, macht den Thaler zur Principal-Einheit. Will man in Gulden rechnen; so ist die Principal-Einheit ein Gulden. Eben so macht der eine Gelehrte in der Zeitrechnung das Jahr, der andere das Seculum, oder das Jahrhundert, zur Principal-Einheit. Sobald die Principal-Einheit bestimmet ist, so nennt man etwas, welches grösser als dieselbe ist, **mehr als Eins.** Und was kleiner als dieselbe ist, heißt **weniger als Eins.** Wer den Thaler Eins nennt, der sieht zwanzig Groschen, für weniger als Eins an, da eben dasselbe Geld vielmehr als Eins seyn würde, wenn man in Groschen oder Pfenningen rechnete, und also eine andere Principal-Einheit gewählt hätte.

So lange nun eine Principal-Einheit fest steht, will man nichts, was nicht der darzugewählten Sache gleich ist, für Eins erkennen.

§. 5.

Eben so lange heißt man etwas, das kleiner als jene Principal-Einheit ist, und eine jede Anzahl solcher kleinern Dinge, einen **Bruch.** Eine Stunde, und mehr Stunden, sind ein Bruch, so lange ein Tag die Principal-Einheit bleibt.

Es giebt also unter den Brüchen eben sowohl, als unter andern Zahlen, theils eine einzelne Einheit, theils eine grössere Zahl derselben. Die Einheit aber, welche ein Bruch ist, heißt eine

gebro-

gebrochene Einheit. Z. E. Ein Pfenning ist eine gebrochene Einheit in Vergleichung mit derjenigen Principal-Einheit, welche ein Groschen ist.

Der Bruch, wenn er verständlich seyn soll, muß erstlich seinen **Nenner** haben, welcher den Bruch benahmt, oder anzeigt, von welcherley gebrochenen Einheiten geredet werde, ob nemlich 2, oder 3, oder mehr der gebrochnen Einheiten, eine Principal-Einheit ausmachen, z. E. Drey Stunden sind ein Bruch der Woche, drey Tage sind auch ein Bruch der Woche. Will man diese und jene als einen Bruch der Woche betrachten; so muß man anzeigen, daß von den Stunden 168, und von den Tagen nur 7 in die Woche gehen. In jenem Falle ist 168, in diesem Falle ist 7 der Nenner.

Aber, da wir bald an mehr, bald an weniger solcher gebrochenen Einheiten gedenken, welche durch den Nenner benahmt werden; so muß der Bruch ausser dem Nenner, noch einen Zähler haben, welcher anzeigt, wie viel solcher gleicher gebrochenen Einheiten in die Rechnung kommen, und ob solcher Einheiten nur eine einzige, oder 2, oder 3, oder mehr, und wieviel derselben sind.

Ein jeder Bruch hat also zwey Zahlen, oder Zahlzeichen, wodurch seine Grösse bestimmt wird, den Zähler und den Nenner. Z. E. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{5}$.

§. 6.

Hier muß man den Anfänger darauf aufmerksam machen, was ein Grundsatz sey. Ein Grund-

satz ist, eine solche Wahrheit, welche ein jeder, sobald er sie recht versteht, sogleich mit unüberwindlichem Beyfall glaubet. Z. E. Derselbe Cörper ist nicht zugleich in Europa und in Amerika. Auch die Rechenkunst hat ihre Grundsätze, welche man deßwegen vorträgt, weil die Erinnerung derselben uns dienet, von andern Wahrheiten, welche nicht so hell sind, uns und andre zu überzeugen. Es werden bald solche Grundsätze vorkommen.

§. 7.

Etwas Kleineres im Grössern, heißt sein Theil. Z. E. Eine Stunde ist ein Theil des Tages; ein Groschen ist ein Theil des Thalers; die Zahl 2 ist ein Theil des Dutzend.

Das Grössere, welches Theile hat, heißt ihr Ganzes. Z. E. Das Schock, ist das Ganze, in Ansehung der Dutzende. Die Meile ist das Ganze in Ansehung der Vier Vierthel-Meilen, welche als Theile darinnen sind.

Eine gebrochene Einheit ist also ein Theil der Principal-Einheit, und eine jede Zahl solcher gebrochenen Einheiten, so lange sie nicht so groß ist, als der Nenner des Bruchs, welcher anzeigt, wieviel derselben auf eine Principal Einheit gehen, ist auch noch ein Theil dieser Principal-Einheit. Sechszehn Groschen, sind noch immer ein $\frac{16}{24}$ Theil des Thalers, weil der Nenner dieses Bruchs 24 ist, das ist, weil 24 erfordert werden, um einen Thaler auszumachen.

Von dem Ganzen und seinen Theilen sind vors erste folgende Grundsätze zu merken.

1) Das

1) Das Ganze ist grösser als jeder einzelne Theil. 2) Der einzelne Theil ist kleiner als sein Ganzes. 3) Das Ganze ist nichts anders als die Sammlung seiner Theile, und diese Sammlung ist dem Ganzen gleich. 4) Ein Theil des Theiles, ist ein Theil des Ganzen. 5) Wenn ein Ganzes eben so viel Theile hat, als ein anderes Ganze, und ein jeder jenseitiger Theil, mit einem diesseitigen, an Grösse übereinstimmt, so sind die beyden Ganzen gleich.

Auch die Zahlen verhalten sich zu einander oftmahls so, wie ein Theil sich zum Ganzen verhält. Vier ist ein Theil von Zwölf. Daher gilt dasjenige, was von dem Ganzen und seinen Theilen gesagt ist, auch von solchen Zahlen.

§. 8.

Wir zählen und berechnen bald dieses, bald jenes. Und in den Geschäften des Lebens sowohl, als in den meisten Wissenschaften, sind alle Zahlen, nicht unbenahmte, **sondern benahmte Zahlen.**

Dieses recht zu verstehen, muß man erstlich sich erinnern, daß selbst ein Bruch eine Zahl sey. Denn er ist entweder eine einzige gebrochene Einheit, oder eine Sammlung derselben. Also haben wir zweyerley Zahlen, **Integralzahlen**, (das ist ganze Zahlen) **und Brüche.**

Zu den Integral-Zahlen, gehört 1) Die Principal-Einheit, welche deswegen auch die Integral-Einheit genennet wird. 2) Eine jede Menge von Principal-Einheiten.

Es ist aber die Principal-Einheit alsdann **benahmt**, wenn wir ausdrücklich daran denken, was es für eine Sache sey, die wir **Eins** nennen, ob es eine Kugel, ob es ein Buch, ob es ein Mensch, oder ob es dieses, ob es jenes Zeichen sey.

Sobald wir nun bey einer Zahl, welche mehr als Eins ist, eine Sammlung von benahmten Einheiten denken, so ist auch selbst **diese ganze Integral-Zahl benahmt.** Z. E. 3 Häuser, 6 Bücher, 4 Groschen.

Und wenn wir unter einer gebrochnen Einheit, einen gewissen Theil, einer so benahmten Integral-Einheit, verstehen; z. E. Ein-Viertheil von einem Groschenbrod, ein Zweytheil von einer Elle Tuch; **so ist diese gebrochene Einheit auch benahmt.**

Auch wenn wir bey einem Bruche, der mehr als eine einzige gebrochene Einheit enthält, lauter benahmte gebrochene Einheiten denken, so denken wir **diesen ganzen Bruch als benahmt.** Z. E. Sechs-Viertheil von einer Elle Tuch.

Hingegen Eins überhaupt, es mag bedeuten was es will, so auch Zwey, Drey, Vier, u. s. w. sind unbenahmte Integral-Zahlen. Und ein Viertheil, ein Achttheil, so auch drey Viertheil, fünf Achttheil, sind unbenahmte gebrochne Zahlen oder unbenahmte Brüche.

Und nun wird man nicht zweifeln, an dem, was ich gesagt habe, daß wir, wenn wir an Zahlen denken, gemeiniglich mit benahmten Zahlen umgehen.

§. 9.

§. 9.

Aber indem wir dieses thun, setzen wir, daß viele Wahrheiten von Zahlen, wahr sind, die Zahlen mögen benahmt seyn, wie sie wollen. Z. E. Wie Drey Schafe nebst Vier Schafen, Sieben Schafe machen, so sind auch Drey Bücher nebst Vier Büchern, zusammen nicht mehr, nicht weniger, als Sieben Bücher. Und überhaupt Drey Dinge nebst Vier Dingen von derselben Art, sind allezeit Sieben solcher Dinge.

Besonders ist uns in der Rechenkunst daran gelegen, diese allgemeine Wahrheiten von den Zahlen zu wissen, ehe wir sie in besondern Fällen, auf benahmte Zahlen anwenden. Und so lange wir uns in dieser allgemeinen Erkenntniß der Zahlen üben; so betrachten wir die Zahlen und ihre Brüche unbenahmt. Z. E. Wir denken überhaupt, Vier und Drey mache Sieben; Achte minder Zwey, sey Sechs; Viermahl Zwey, sey Acht; und Drey, sey von Zwölf ein Vierthel. So auch, ein Vierthel nebst einem andern Vierthel, sey ein Zweythel, u. s. w.

§. 10.

Aber da wir eine unbenahmte Zahl, oft als eine Einheit ansehen, z. E. Ein Zehnel, ein Dutzend, ein Schock; und da wir oft grössere Zahlen, von solchen Zahl-Einheiten denken, z. E. Zwey-Zehnel, Vier-Dutzend, fünf Schock; da wir uns endlich auch oftmahls Brüche, von solchen gewählten Zahl-Einheiten vorstellen, z. E. Ein Zweythel vom Zehnel, Drey Vierthel vom Du-

tzend, ein Viertheil vom Schocke: so müssen sogar in der Berechnung unbenahmter Zahlen, die Zahlen auf eine gewisse Art benahmt seyn. Man muß nemlich anzeigen oder denken, ob die Principal-Einheit, mit welcher man umgeht, und welche bey den grössern Zahlen, auch bey den Brüchen, zum Grunde liegt, eine Integral-Einheit, oder eine gebrochene Einheit, oder eine Zahl von Integral-Einheiten, bedeute. Z. E. Wenn man Vier denkt oder anzeigt; so muß bestimmt oder benahmt werden, ob es Vier Integral-Einheiten sind, ob es vier Zweythel, vier Dritthel, oder vier andere gebrochene Einheiten sind, ob es vier Zehnel, oder vier Dutzend, oder vier Hundert, oder vier Tausend sind.

Diese, in der allgemeinen Rechenkunst vorkommende, Benahmung der Zahlen, mag die **arithmetische Benahmung** derselben heissen. Z. E. Die Zahl Fünf, ist arithmetisch benahmt, wenn angezeigt wird, daß sie fünf Stücke, daß sie fünf Dutzend, daß sie fünf Tausend, daß sie fünf Viertheil bedeute.

Um kürzer zu reden, will ich die arithmetische Benahmung **Die Zahl-Würde** nennen, z. E. **Fünf** und **Sieben** sind alsdann von gleicher Zahl-Würde, wenn die arithmetische Benahmung beyderseits dieselbe ist, oder wenn sowohl dort als hier, entweder beyderseits von Integral-Einheiten, oder beyderseits von Viertheln, oder beyderseits von Zehneln, oder beyderseits von Hunderten, oder beyderseits von Tausenden, geredet wird. Daher ist **Fünf**, mit fünf, nicht von gleicher Zahl-Würde,

de,

de, wenn Fünf, 5 Zehnel; fünf aber 5 Hunderte, oder 5 Vierthel bedeutet. So auch, Sechs und Neune, sind von gleicher Zahl-Würde, wenn beyderseits Dritthel verstanden werden. Z. E. Sechs Dritthel, Neun Dritthel. Hingegen, wenn man spricht Sechs Dritthel, und Neun Vierthel, so sind Sechs und Neun nicht von gleicher Zahl-Würde.

Hieraus erhellet, daß bey manchen Zahlen, eine gedoppelte Zahl-Würde zu betrachten sey. Z. E. Man denke Drey Hundert-Schock; so hat Drey erstlich die Zahl-Würde, welche durch Hundert ausgedrückt wird. Denn, es werden nicht Drey Einzelne, sondern Drey Hundert gedacht, und doch ist dieses nicht genung, um die Zahl Drey hier zu verstehen. Denn man muß noch hinzudenken, daß ein Schock die Principal-Einheit sey, von welcher die Zahl Drey, Drey-Hundert ausdrückt. So denke man auch Drey-Vierthel Dutzend. Hier ist die Zahl Drey. Ihre Zahl-Würde wird erstlich durch das Wort Vierthel ausgedrückt. Denn es sind nicht Drey Integral-Einheiten, sondern Drey Vierthel. Aber zweytens, sind es nicht Drey Vierthel von einer einfachen Einheit, sondern von einer solchen Einheit, welche ein Dutzend heißt. Und ehe auch dies letzte hinzugedacht wird, so versteht man das Wort Drey nicht so, wie man es nach dem Zusammenhang der Worte: Drey-Vierthel Dutzend, verstehen soll. Oder kurz: bey der Zahl Drey muß hier eine doppelte Zahl-Würde in Betrachtung genommen werden, erstlich, daß sie Drey Vierthel, und zwar zweytens, von einem Dutzend bedeute.

§. 11.

§. 11.

Es hat einen sehr grossen Nutzen, wenn man sich in der Lehrart der Rechenkunst angewöhnt, unter dem selbstgewählten oder vorgeschriebenen Zeichen eines Buchstaben, dasjenige zu denken, was mau darunter denken will oder soll, als z. E.

1) Die benahmte Principal-Einheit, wovon in benahmten Zahlen die Rede ist. Z. E. Es ist ja nicht schwer, zu behalten, daß A einen Thaler, und B einen Groschen bedeuten solle, wenn man es selbst will oder einem andern sagt, z. E. Wer wird alsdann nicht wissen, wenn er die Worte 3 A, 5 B, hört oder sieht, daß dieses eben so viel gesagt sey, als: Drey Thaler, fünf Groschen?

2) Solche Zahlen, als man will, z. E. Wenn man einmahl will oder sagt, daß A Acht; und B Drey bedeute, wer wird alsdann nicht leicht behalten, daß A nebst B so viel sey, als Acht nebst Drey, oder als Eilf; daß A minder B, so viel bedeute, als Acht minder Drey, das ist, als fünf; Daß A mahl B so viel sey, als Acht mahl Drey, das ist, als Vier und zwanzig?

3) Oder die Zahl-Würde. (§. 10.) Z. E. Wenn M ein Zehnel, N ein Hundert bedeuten soll, wer wird alsdann nicht wissen, daß zwey M so viel bedeute als zwey Zehnel, oder Zwanzig; daß drey N so viel bedeute als drey Hundert; und daß also drey N minder zwey M, so viel bedeute, als drey Hundert minder zwanzig; oder daß fünf M so viel sey als fünf Zehnel oder funfzig; und daß ein Zweythel N so viel sey, als ein Zweythel von Hundert, das ist, auch als funfzig; auch daß

endlich

endlich fünf M nichts anders sey, als ein Zweythel von N, weil ein jedes Funfzig ist?

4) Oder eine jede Zahl, die eine gewisse Beschaffenheit hat, z. E. Warum sollte man nicht eine jede grössere Zahl, ein G, und eine jede kleinere Zahl, ein K nennen? und wer wird alsdenn nicht verstehen, wenn man sagt, zweymahl G sey mehr als zweymahl K? oder, welches einerley ist, 2 G, sey grösser, als 2 K. Und wenn man nun überhaupt ferner fest setzt, daß Z eine jede Zahl bedeuten solle, und daß, wenn Z zwey- oder mehrmahl vorkömmt, dieß Zeichen Z allemahl gleichviel bedeute; so wird man auch den Ausdruck verstehen, der so aussieht: Z G ist grösser als Z K. Diese kurzen Zeichen bedeuten nemlich folgendes: Eine gewisse Anzahl von einer grössern Zahl, ist grösser, als eben dieselbe Anzahl von einer kleinern Zahl.

Wenn man nun zu verschiedenen Zeiten rechnet, so ändert man nach Belieben die Dedeutung der Buchstabeu, z. E. G bedeutete vorhin eine grössere Zahl. Wenn wir nun itzund so wollen; so bedeutet G eine grade Zahl. Wenn nun zugleich U eine ungrade Zahl bedeuten soll; und man eine jede grade Zahl mit G, eine jede ungrade Zahl mit U benennen will, ohne auf die Grösse der Zahlen zu sehen; so wird einem jeden folgender Ausdruck deutlich seyn, 2 G giebt G, 3 G giebt G, 4 G giebt G; und die Summe von G und U giebt U. Die Bedeutung des letzten Ausdrucks ist nemlich diese: Die Summe einer jeden graden und ungraden Zahl zusammen, ist immer ungrad,

was

was es auch sonst für Zahlen seyn mögen, wenn nur die eine Zahl grade, die andre ungrade ist.

Ich rathe es denen, welche sich, oder andere, in der Rechenkunst, nach der bessern Lehrart, üben wollen, oder dieses Buch zu brauchen gedenken, daß sie nicht eher weiter gehen, als bis sie, durch eignes Nachdenken, oder durch Hülfe eines Lehrers, eine sichere und feste Erkenntniß dieser Bezeichnung der Dinge und Zahlen, welche durch Buchstaben geschicht, besitzen, und sich selbst dieses Kunstgriffes zu bedienen verstehen.

§ 12.

Alsdann, müssen die **Grundsätze von der Gleichheit**, dem Gedächtnisse so anbefohlen werden, daß man sich sehr leicht derselben erinnert, in denen Fällen, wo wir aus denselben dasjenige schliessen, was zu unserer Absicht gehört.

Es sind aber diese Grundsätze folgende, 1) **Was einem unter vielen Dingen gleich ist, das ist einem jeden derselben gleich.** Z. E. Vorausgesetzt, daß zwey Dutzend, dreymahl acht, die Hälfte von 48, und zwey Fünfthel Schock, gleich viel bedeuten; und vorausgesetzt, daß 24 eben so viel sey, als zwey Fünfthel Schock; so ist auch eben dadurch bekannt, daß 24 eben so viel sey, als zwey Dutzend, oder als die Hälfte von 48. 2) **Wenn gleiche Dinge, einen gleichen Zusatz bekommen, oder eine gleiche Abnahme leiden; so sind die Resultaten gleich.** Z. E. 4 nebst 3, geben in einem Falle, eben eine so grosse Summe, als in einem andern Falle. 8 minder 3, ist in einem

nem Falle eben so viel, als in dem andern Falle. Also A nebst B, oder die Summe von ihnen, ist in einem Falle so groß, als die Summe von ihnen in allen Fällen ist. Und der Rest, welcher übrig bleibt, wenn man in einem Falle, B die kleinere Zahl, von A der grössern Zahl, abnimmt, ist gleich einem jeden Reste, welcher übrig bleibt, wenn man in noch so vielen Fällen die grössere Zahl A, durch den Abzug der kleinern Zahl B, vermindert. 3) Wenn etwas Grösseres, und etwas Kleineres, beyderseits gleichen Zuwachs bekömmt, oder gleiche Abnahme leidet, so entsteht aus dem Grösseren etwas Grösseres, aus dem Kleineren etwas Kleineres. 4) Wenn zwey gleiche Dinge, einen ungleichen Zusatz erhalten, so entsteht aus demjenigen etwas Grösseres, dessen Zusatz grösser ist; aus demjenigen aber, dessen Zusatz kleiner ist, entsteht etwas Kleineres. 5) Wenn zwey gleiche Dinge eine ungleiche Abnahme leiden; so entsteht aus demjenigen, dessen Abnahme kleiner ist, etwas Grösseres; aus demjenigen aber, dessen Abnahme grösser ist, entsteht etwas Kleineres. 6) Wenn jeder Theil eines Ganzen mit irgend einem besondern Theile eines andern Ganzen an Grösse harmonirt; so sind die beyden Ganzen gleich. Z. E. Es bestehe das Ganze A, aus den Theilen a, b, c. Es bestehe das Ganze B, aus den Theilen d, e, f. Wenn a gleich ist dem d; wenn b gleich ist dem e, wenn c gleich ist dem f: so ist auch das Ganze A, gleich dem Ganzen B.

Wenn zwey Dinge oder Zahlen gleich sind, und man durch Schrift sagen will, daß sie gleich sind: so verbindet man die Zeichen dieser gleichen Dinge, durch das Zeichen der Gleichheit (=). Z. E. A sey ein Dutzend, B sey zweymahl Sechs. Beydes ist gleich. A=B. Man lese: A ist gleich B.

Wenn man nun so schreibt: A=B=C=D=E. u. s. w.; so will man anzeigen, A sey gleich dem B, B dem C, C dem D, D dem E, woraus alsdann folgt, daß A=E, daß A=D, daß A=C, daß A=B, mit einem Worte, daß ein jedes dieser Dinge einem jeden andern von diesen Dingen gleich sey.

Dieses ist wahr, wir mögen die Dinge, welche A, B, C, D, E, heissen, kennen oder nicht kennen. So bald wir wissen, daß A=B=C=D=E, so wissen wir auch, daß ein jedes von denselben, einem jeden von denselben gleich sey. Z. E. So ist es wahr, daß B=D.

Das Nachfolgende wird erklären, daß man zuweilen eine Zahl durch zusammengesetzte Zeichen ausdrücke. Z. E. (4+5) ist 9. Also darf man an Statt 9 schreiben (4+5). (8—2) ist 6. Also darf man an Statt 6 schreiben (8—2). (2x5) ist 10. Also darf man an Statt 10 schreiben (2x5). $\frac{8}{2}$ ist 4. Also darf man an Statt 4 schreiben $\frac{8}{2}$. (3x2x4) ist (6x4) oder 24. Daher darf man an Statt 24 schreiben, entweder (2x3x4) oder (6x4). Man darf auch an Statt (6x4) schreiben 24. Und also, wenn A=(B+C+D)=(ExG) =$\frac{F}{2}$; so darf man im Rechnen, diese Zeichen,

wie

wie es die Absicht fordert, verwechseln. Denn sie bedeuten ja gleich viel. So bald aber verschiedne Zeichen gleich viel bedeuten, so darf man sie mit einander verwechseln. Denn sie bedeuten gleich viel.

Will man durch Schrift anzeigen, daß zwey Grössen oder zwey Zahlen ungleich sind; so bedient man sich des Zeichens der Ungleichheit ($<$) oder ($>$). Z. E. Wenn man anzeigen will, V sey grösser als 4; so schreibt man $V > 4$, oder, $4 < V$. So auch, wenn man sieht $E > G$; so lese man: E ist grösser als G. Oder, G ist kleiner als E. Und wenn man sieht, $A < B$; so lese man, A ist kleiner als B, oder B ist grösser als A.

Es ist auch ein nützlicher Grundsatz, **daß, wenn viele Dinge einander gleich sind, und ein ander Ding D, für grösser als eins derselben erkannt wird, dasselbe Ding D, auch für grösser, als ein jedes derselben müsse erkannt werden.** Z. E. Wenn $IV = 4 = \frac{12}{3}$, und, wenn VI für grösser erkannt wird, als IV; so wird auch VI eben dadurch für grösser erkannt, als 4 oder als $\frac{12}{3}$.

Auch folgendes ist ein Grundsatz: **Was kleiner ist, als eins von vielen gleichen Dingen, das ist auch kleiner, als ein jedes derselben.** Z. E. Wenn $A = B = C = D$; und wenn $Z < D$; so ist $Z < A$, so ist $Z < B$, so ist $Z < C$.

Auch ist folgendes ein Grundsatz: **Was grösser ist, als das Grössere, das ist auch grösser, als das Kleinere; und, was kleiner ist, als**

das Kleinere, das ist auch kleiner, als das Grössere. Z. E. Es sey $D > E$. Wenn nun $A > D$; so ist auch $A > E$. Ferner es sey $X < Z$; es sey ferner $Y < X$; so ist $Y > Z$.

§ 13.

Von der Bezeichnung der Zahlen durch Buchstaben ist nachfolgendes zu merken. 1) So bald zwey Zahlen von uns für gleich erkannt werden, so benennen wir sie mit einerley Buchstaben. Gesetzt, die Zahl 4 hiesse A, die Zahl IV hiesse X. So bald wir erkennen, daß $IV = 4$, oder daß A gleich X, so nennen wir X auch A, und schreiben nicht mehr $A + X$, sondern $A + A$.

2) Hingegen so lange wir Zahlen für ungleich erkennen, oder erst untersuchen wollen, ob sie gleich sind; so benennen wir sie nicht mit einerley, sondern mit verschiedenen Zeichen oder Buchstaben.

3) Wenn man zugleich anstatt bekannter, und zugleich anstatt unbekannter Zahlen, Buchstaben schreibt, so nimmt man, anstatt der bekannten Zahlen, die ersten Buchstaben des Alphabets. Z. E. A, B, C, u. s. w.; anstatt der unbekannten Zahlen aber, nimmt man die letzten Buchstaben des Alphabets. Z. E. V, X, Y, Z. Doch dieses ist willkührlich.

§ 14.

Wenn man eine Menge von Einheiten als eine Zahl, oder eine Menge von Theilen, als ein Ganzes betrachtet, und nur auf die Grösse dieses Ganzen

zen

zen sieht, so hat man mit der Ordnung der Theile oder Einheiten nichts zu schaffen. Dieselbe ist gleichgültig, z. E. 4 nebst 5 nebst 3, sind Theile von Zwölf. 3 nebst 4 nebst 5, sind eben diese Theile von Zwölf. Jene 12 sind weder grösser noch kleiner als diese. Kurz, es sey ein Grundsatz in der Rechenkunst, **daß man die Ordnung der Theile eines Ganzen, wie es die Absicht erfordert, verändern dürfe.**

§. 15.

Addiren, heißt Zahlen als Neben-Theile eines Ganzen ansehen, und diese ganze Zahl oder **Summe**, auf die gewöhnlichste Art zu schreiben und auszusprechen suchen.

Die Neben-Theile, welche in der Summe sind, werden vor der Addition, oder auch, so oft man sie als Neben-Theile ansieht, mit dem **Additions-Zeichen**, welches zwischen ihnen steht, und Plus heißt, in folgender Gestalt (+) geschrieben. Z. E. (4+5)=9. (6+1+3)=10. Man lese, 6 Plus 1, Plus 3, ist gleich 10. So auch (A+B+C+D)=X, oder X=(Y+Z).

Nunmehro ist bekannt (§. 14), daß A+B+C+D)=(C+A+D+B), wie man die Ordnung dieser Neben-Theile auch verkehrt, und welche Zahlen auch durch diese Buchstaben bedeutet werden. Z. E. (1+4+2)=(4+2+1)=(2+4+1). Ein jedes von diesen Zeichen bedeutet Sieben.

Die Nebentheile, mit dem Zeichen Plus oder (+) geschrieben, bedeuten, alle zusammen genom-

men, schon die Summe. Wenn nun die Summe S heißt, und die Neben-Theile A, B, C, D, sind: so ist $S = (A+B+C+D) = (B+D+A+C)$ und man darf diese Zeichen mit einander verwechseln, wenn es die Absicht erfordert.

Zuweilen besteht eine Summe aus lauter Integral-Zahlen, z. E. $(4+3)$; zuweilen aus etlichen Integral-Zahlen und etlichen Brüchen.

Es wird aber ein Bruch so geschrieben, daß der Zähler oben, hierauf ein Querstrich, und der Nenner darunter stehe, z. E. $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{8}{5}$. Man lese, ein Viertheil, ein Fünftheil, ein Zweytheil, zwey Dritthel, acht Fünfthel. Daher, wenn man die Zahlen durch Buchstaben ausdrückt, so bedeuten $\frac{A}{B}, \frac{C}{D}, \frac{X}{Y}$, gleichfalls Brüche.

Also bedeuten $(\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$, so auch $(5+6+\frac{1}{2})$, so auch $(\frac{A}{B}+\frac{C}{D})$; so auch $(C+\frac{m}{n}+D+\frac{X}{Y})$ lauter Summen, deren Neben-Theile, entweder aus lauter Brüchen, oder zugleich aus Integral-Zahlen und zugleich aus Brüchen bestehen.

§. 16.

Die Antwort auf die Frage, um wieviel eine Grösse oder Zahl grösser sey als eine andere, heißt der Unterschied, die Differenz, oder das arithmetische Verhältniß derselben, z. E. zwischen 9 und 5, ist 4 die Differenz.

Wenn die Zahlen gleich sind, so hat die Differenz gar keine Grösse. Eine solche Differenz wird ausge-

ausgedrückt durch eine Nulle, z. E. die Differenz zwischen VIII und 8 ist = 0.

Wenn die Differenz nicht eine Nulle, sondern eine Zahl ist, so heißt sie auch wohl der **Rest**, z. E. der Rest, welcher in der Vergleichung von 5 und 3 erkannt wird, ist 2.

Subtrahiren, heißt zwey Zahlen, als solche ansehen, daß uns daran gelegen ist, ihre Differenz zu wissen; und alsdann ihre Differenz suchen uud auf die gewöhnlichste Art ausdrücken. Von den beyden Zahlen, deren Differenz gesucht oder gedacht wird, heißt die eine, und zwar gemeiniglich die grössere, die **Hauptsumme**; die andere aber heißt der **Abzug**.

Es wird die Hauptsumme gemeiniglich zuerst, hernach das **Subtractions-Zeichen** (—), welches **Minder** oder **Minus** heißt, und darauf der Abzug geschrieben. Z. E. (8 — 5) (A — C). Man lese: Acht minus fünf, A minus C.

Wenn zwey Zahlen, oder an ihrer Statt Buchstaben, mit dem Zeichen Minus, oder (—) geschrieben sind; so will man anzeigen, daß man sie als eine Hauptsumme und einen Abzug ansehen, folglich die Differenz suchen, folglich subtrahiren müsse. Ja es wird selbst die Differenz durch so geschriebene Zahlen bezeichnet, z. E. (5 — 3) = 2. Daher darf man das Zeichen (5 — 3) und 2, mit einander verwechseln. So auch überhaupt, wird das Zeichen der zu suchenden Differenz, und das Zeichen der gefundenen Differenz, mit einander nach Belieben verwechselt. Z. E. Wenn bekannt ist, daß (A—B) = C, so darf man, das Zeichen

A—B, und das Zeichen C, allenthalben verwechseln, wo es die Absicht fordert.

Es werden aber von einander subtrahiret, allerley Zahlen, Integral-Zahlen von Integral-Zahlen, z. E. 6 — 3; ferner Brüche von Brüchen, z. E. $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$; ferner Brüche von Integral-Zahlen, z. E. $5-\frac{3}{4}$; ferner, Brüche von unreinen Integral-Zahlen, das ist solchen, welche Brüche bey sich haben, z. E. $5\frac{2}{5}-\frac{3}{4}$; ferner unreine Integral-Zahlen von einander, z. E. $3\frac{1}{4}-2\frac{1}{2}$; ferner, reine Integral-Zahlen von unreinen, z. E. $5\frac{3}{8}-2$. So auch überhaupt A—B, oder $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$, oder $A-\frac{C}{D}$, oder $\left(A+\frac{B}{C}\right)-\left(D+\frac{G}{H}\right)$.

Die Differenz ist gleich dem Nebentheile, welcher nebst dem andern Nebentheile, der dem Abzuge gleicht, in der Hauptsumme ist, z. E. Wenn $A-B=D$, so ist $B+D=A$. Oder, wenn $9-6=3$; so ist $6+3=9$.

Daher sind folgende Grundsätze leicht zu begreifen. **Die Summe des Abzuges und der Differenz ist gleich der Hauptsumme.** Wenn man dieselbe Hauptsumme behält, deren Differenz, von einem gewissen Abzuge man gefunden hat; **und wenn man hernach die gefundene Differenz, von der Hauptsumme subtrahirt, so wird der erste Abzug die neue Differenz.** Z. E. Wenn $G-H=M$; so ist, $G-M=H$. Oder, weil man erkennt, daß $9-6=3$; so würde man daraus erkennen, daß $9-3=6$, gesetzt auch, daß man

man die Rechnung nicht von neuem anstellete, oder die Differenz nicht sogleich in die Augen fiele.

§ 17.

Durch die Subtraction, wird, wo nicht die ganze Hauptsumme, doch ein Theil derselben gleichsam vernichtet. Es geht uns im Rechnen nicht an, welcher Theil derselben vernichtet wird, wenn nur der Abzug so groß ist, als er seyn soll. Oder kurz: wenn eine Zahl Theile hat, und Abzug leiden soll; so darf man den Abzug verrichten, oder beyschreiben, bey welchem Theile man will; so kömmt doch immer ein gleiches Resultat. Z. E. $3-1+2+4=3+2-1+4=4-1+2+3$. Es ist allemahl 8.

§ 18.

Ferner ist offenbar, daß wenn eine Zahl, durch Addition einen Zusatz bekömmt, und hernach durch Subtraction gleiche Abnahme leidet, dieselbe erste Zahl wieder hervor komme. Z. E. $8+3-3=8$. Und überhaupt, $C-D+D=C$. Eben dieses geschicht, wenn eine Zahl erst durch Subtraction einen Abzug leiden soll, und hernach durch Addition einen eben solchen Zusatz erhält. Z. E. $5-2+2=5$. Und überhaupt $A-B+B=A$. Oder eben dasselbe mit andern Worten: So bald wir, da, wo addirt ist, eben so viel subtrahiren sollen; so streichen wir nur jenes Addirte weg. Z. E. Man sollte von $(9+3)$ subtrahiren 3; so streicht man $+3$ weg, und schreibt nur 9; so ist die Subtraction geschehen. So auch,

wenn man eben so viel addiren soll, als schon subtrahirt ist, so streicht man das Subtrahirte weg. Z. E. Wenn man zu (A — B) addiren sollte B, so streicht man — B weg, und schreibt A; so ist die Addition geschehen. Wer zu 8 — 3 wiederum 3 addiren soll; streicht — 3 weg und schreibt 8. Oder kürzer: **Eine gleiche Addition, und eine gleiche Subtraction, in welcher Ordnung sie auch stehen mögen, heben einander auf.**

Man wird nun folgende Zeichen verstehen:

$+(2 \text{ mal } 6) + 5 - 6 + 8 - (2 \text{ mal } 5)$ oder
$+(2 \text{ mal } A) + B - A + C - (2 \text{ mal } B)$.

Auch sieht man wohl, daß, wenn die Additionen und Subtractionen wirklich angestellt werden, die Zahl 9 herauskomme. Man verkürzt sich aber die Arbeit, wenn man eben so viel in Plus, als in Minus gegen einander wegstreicht, und daher anstatt jener Zeichen, nur schreibt:

$+6+8-5$, welches 9 ist, oder
$+A+C-B$.

Und wenn gleich in Plus und in Minus, sich nicht gleiche Zahlen finden sollten; so dürfte man doch die kleinere, deren Zeichen dem Zeichen der grössern zuwider ist, wegstreichen, und anstatt der grössern, die Differenz setzen. Z. E. $+6-4+8$. An dieser Zahlen Statt, darf man setzen $+2+8$, weil $6=2+4$.

Und diese Abrechnung der Plus-Zahlen, und Minus-Zahlen, nebst der Sammlung ähnlicher Zahlen in eine Summe, heißt **die Universal-Addition.**

dition. Z. E. Man addire +3A—B—A+3B+C—2B+2A; so kömmt 4A+C.

§ 19.

Eine Zahl, welche durch mancherley Plus, oder auch wohl durch vermischtes Minus ausgedrückt wird, heißt algebraisch ausgedrückt. Z. E. Die Zahl 9, leidet sehr viele algebraische Ausdrücke, welche allesamt einerley, nemlich 9 bedeuten. Z. E. 5+4, oder 6+3, oder 7+2, oder 8+1, oder 12—3, oder 11—2, oder 8+6—5.

Eine so algebraisch ausgedrückte Zahl läßt sich auch als einen Abzug, von einer auf eben dieselbe Art geschriebenen Hauptsumme ansehen. Ich will sagen, es läßt sich eine algebraische Zahl von der andern subtrahiren.

Ehe ich die Beschaffenheit dieser Universal-Subtraction zeige, muß ich noch zwey Anmerkungen machen. 1) In einer algebraischen Zahl wenn der allererste Theil kein ausdrückliches Zeichen hat, ist dabey das Zeichen (+) zu verstehen. Z. E. +4—3, wird gemeiniglich so geschrieben, 4—3. 2) In einer algebraischen Zahl, heissen diejenigen Theile, welche das Zeichen (+) vor sich haben, positiv; diejenigen aber, welche das Zeichen (—) vor sich haben, heissen negativ. z. E. In der algebraischen Zahl 9—3+6+1—2, sind 3 positive, und 2 negative Zahlen.

Hier muß der Anfänger durch Nachdenken geübt werden, einzusehen, daß die positiven Zahlen

des Abzuges, einige positive Zahlen der Hauptsumme zernichten, und also so anzusehn sind, als wenn sie in der Hauptsumme negativ wären. Hingegen die negativen Zahlen des Abzuges, da sie einige positive Zahlen des Abzuges zernichten, machen den Abzug kleiner, so daß er nunmehro weniger Positives in der Hauptsumme zernichtet, als geschehen würde, wenn diese negativen Zahlen im Abzuge nicht stünden. Daher sind diese negativen Zahlen des Abzuges so anzusehen, als wenn sie in der Hauptsumme positiv wären, z. E. $6-(3+2)=(6-2)-3$. Und $6-(5-2)=(6+2)-5$.

Wenn man also eine algebraische Zahl, als einen Abzug von einer andern ansehen, oder die Universal-Subtraction anwenden soll: so verwandle man in dem Abzuge, das Zeichen (+) in (—), und das Zeichen (—) in (+), und man bringe hernach, was herauskömmt, durch Universal-Addition in Ordnung; so ist geschehen, was geschehen sollte, z. E. Man soll subtrahiren von der Hauptsumme, welche ist, $3A+2B-C$, den Abzug, welcher ist, $A-B+2C$: so kehre man die Zeichen des Abzuges um, und schreibe das Umgekehrte zu der Hauptsumme. So kömmt $3A+2B-C-A+B-2C$. Wenn nun dieses in Ordnung gebracht, oder addirt wird, so kömmt $2A+3B-3C$.

Hieraus folgt, daß wenn man die Differenz zweyer Zahlen algebraisch schreibt, z. E. $5-2$;

und

und zur Hauptsumme so viel addirt, als zum Abzuge, z. E. (5 + 3) — (2 + 3), die Grösse jener ersten Differenz schlechterdings nicht verändert sey. Denn der positive Zusatz im Abzuge ist negativ in der Hauptsumme; der Zusatz aber in der Hauptsumme ist positiv. Ist nun jener Zusatz diesem gleich; so hebt einer den andern auf. (5 + 3) — (2 + 3) = 5 — 2. Und überhaupt (A + B) — (C + B) = A — C. Eben darum bleibt auch die Differenz unverändert, wenn man von der Hauptsumme und von dem Abzuge gleichviel subtrahirt. Denn dadurch wird in der Hauptsumme eine negative Zahl gesetzt, und weil Minus im Abzuge, Plus in der Hauptsumme ist: so hebt eins das andre auf, z. E. 9 — 7 = (9 — 2) — (7 — 2). Und überhaupt A — D = (A — B) — (D — B). Oder kurz: Zwey gleiche Additionen, die an der Hauptsumme und am Abzuge geschehen; so auch zwey gleiche Subtractionen, die beyderseits geschehen, heben einander auf, oder verändern die Differenz nicht.

§ 20.

Diese allgemeinen Grundsätze der Rechenkunst, sind so leicht, daß sie ohne Schwierigkeit einem Kinde, so bald es nur bis 100 zu zählen weis, vorgetragen, und vermittelst 100 Rechenpfenninge oder Kartenblätter, sogar zum Spiele gemacht werden: ob es gleich nicht rathsam ist, eher damit anzufangen, als bis der Lernende Ziffern, Buchstaben und Zeichen selbst schreibt, und eine jede

Zahl

Zahl bis 1000, durch Ziffern auszudrücken gewohnt ist. Das Zählen bis 1000, und die schriftliche Bezeichnung, der, im Zählen jedesmahl vorkommenden, Zahl, ist also diejenige Uebung, welche mit einem Anfänger noch eher anzustellen ist, als man ihm dieses erste Hauptstück der Rechenkunst vorzutragen hat.

Die in demselben erinnerten Grundsätze sind nun zwar so leicht, daß Leute von geringer Einsicht, sie eben deswegen verachten, und für eine unnöthige Weitläuftigkeit ausgeben werden. Aber derjenige Verstand, welcher sich nicht gewöhnt, diese leichten Grundsätze oft zu denken, und jedesmahl zu untersuchen, ob nicht aus einem derselben dasjenige zu finden sey, woran ihm im Rechnen oder Nachdenken gelegen ist, wird nicht nur niemahls in die mathematische Rechenkunst eine Einsicht bekommen, sondern auch die kaufmännische und ökonomische mit viel grösserer Schwierigkeit, und doch ohne eigene Ueberzeugung, lernen.

Wer diesem Urtheile Beyfall giebt, wird, entweder selbst, oder mit seinen Untergebnen, nicht eher weiter zu gehen verlangen, als bis er dieses Hauptstück durch öftere Wiederhohlung nicht nur dem Verstande vollkommen begreiflich, sondern auch dem Gedächtnisse geläufig gemacht hat.

Zweytes Hauptstück.

Von der Decimal-Ordnung, und von der Ausübung der Addition und Subtraction, bey reinen Integral-Zahlen.

§ 21.

Eine jede von diesen Ziffern, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, bedeutet eine gewisse Anzahl von Einheiten; die erste eine einzige, die zweyte zwey, die dritte drey, u. s. w.

Aber wir wissen schon aus dem vorigen Hauptstücke, daß man Einheiten von verschiedener Zahl-Würde zu denken pflege. (§. 3. und 10.)

Gleichwie also die Ziffer 1 geschickt ist, nicht nur eine einzige Einheit anzudeuten, sondern auch eben sowohl ein Zehnel, oder ein Dutzend, oder ein Schock, oder ein Hundert, oder ein Tausend, bedeutet; so darf man die Ziffern 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ebenfalls brauchen, nicht nur mehr Einel, sondern auch mehr Zehnel, oder mehr Dutzend, oder mehr Hundert, oder mehr Tausend, anzuzeigen.

Auf solche Weise läßt sich durch eine einzige Ziffer, mancherley Zahl, mancherley sehr grosse Zahl, ausdrücken, wenn nur jedesmahl ein Zeichen dabey steht, welche von denen verschiednen Zahlen, zu deren Bezeichnung man eine Ziffer gewidmet hat, diesmahl gelten solle, z. E. Wenn ich über

über eine Ziffer ein kleines z, oder d, oder s schriebe, so wären diese Zeichen sehr geschickt, anzuzeigen, daß im ersten Falle so viel Zehnel, im zweyten Falle so viel Dutzend, im dritten Falle so viel Schock, angezeigt werden. Alsdann würde bedeuten:

1^z = ein Zehnel oder Zehn. 3^d = drey Dutzend. 9^s = neun Schock Und eben so würde 3^e geschickt seyn, drey Einzelne zu bedeuten. So auch 3^z drey Zehnel; und 3^h drey Hundert, 3^t drey Tausend.

Aber da die Zeichen willkührlich sind; so dürfte man auch, eine Ziffer, welche Einel bedeuten sollte, oben mit einer kleinen Nulle bezeichnen; und, um Zehnel anzuzeigen, über der Ziffer einen kleinen Strich machen; ferner den Strich verdoppeln, um Hunderte anzuzeigen; endlich den Strich verdreyfachen, um Tausende zu bedeuten. Und diese Bezeichnung bitte ich im Gedächtnisse zu behalten. z. E.

4° Man lese: Vier Einel, oder 4.
$4'$ — — Vier Zehnel, oder 40.
$4''$ — — Vier Hunderte, oder 400.
$4'''$ — — Vier Tausende, oder 4000.

So auch $3''' = 3000$. $5'' = 500$. $6' = 60$. $7^\circ = 7$. So auch $14^\circ = 14$ Einel oder 14. $14' = 14$ Zehnel oder 140. $14'' = 14$ Hunderte oder 1400. $14''' = 14$ Tausende, oder 14000. So auch $162'' = 162$ Hunderte, oder 16200. u. s. w.

Wenn

Wenn ich also künftig schreibe, einen Buchstab oder eine Ziffer, und darüber setze entweder (°), oder (′), oder (″), oder (‴); so will ich im ersten Falle Einel, im zweyten Zehnel, im dritten Hunderte, im vierten Tausende anzeigen. z. E. Gesetzt, ich schriebe G‴, und es würde hernach bekannt, daß G so viel sey, als die Ziffer 6; so würde G‴ sechs Tausend bedeuten. Und diese sechs Tausend würde ich zuweilen so schreiben, 6‴. Hingegen G″ wären mir nur sechs Hundert, oder 6″. Und G′ wäre mir nur sechs Zehnel, oder 60. Endlich G°, blieben Sechs oder 6°. Hierbey ist nur noch zu merken, daß, wenn gar kein Zeichen drüber steht, das Zeichen (°) müsse verstanden werden. z. E. G° = G. 6° = 6.

Aber, um es noch einmal zu sagen, die Zeichen sind willkührlich. Wenn also viele Ziffern in Ordnung neben einander stehen, so darf ich mir vorstellen, daß eine jede, auf eine Ziffer, weiter zur Rechten folgende, Ziffer, zugleich die Stelle eines Strichs vertrete, über derjenigen Ziffer, worauf sie folgt. Wenn also eine Ziffer, von der Rechten zur Linken, die erste ist; so wäre sie so anzusehen, als wenn eine Nulle oder gar kein Zeichen darüber stünde, das ist, sie bedeutete Einel. Wäre sie in dieser Ordnung die zweyte; so stünde eine Ziffer hinter ihr; sie hätte einen unsichtbaren Strich über sich, das ist, sie bedeutete Zehnel. Stünde sie in der dritten Stelle; so hätte sie zwey Ziffern hinter sich, zwey unsichtbare Striche über sich, das ist, sie bedeutete Hunderte.

Stünde sie in der vierten Stelle; so hätte sie drey Ziffern hinter sich, drey unsichtbare Striche über sich, das ist, sie bedeutete Tausende. Dieses wird durch Exempel deutlicher. z. E. $3=\overset{\circ}{3}$. $42=\overset{\prime}{4}\overset{\circ}{2}$. $326=\overset{\prime\prime}{3}\overset{\prime}{2}\overset{\circ}{6}$. $4612=\overset{\prime\prime\prime}{4}\overset{\prime\prime}{6}\overset{\prime}{1}\overset{\circ}{2}$.

Man gewöhne die Lernenden, die erste Stelle von der Rechten zur Linken, oder die Stelle der Einel, die Stelle E zu heissen; die zweyte Stelle, oder der Zehnel, heisse die Stelle Z; die dritte Stelle, oder die Hunderte, heisse die Stelle H; und die vierte Stelle, oder der Tausende, heisse die Stelle T. Diese Benennungen müssen ihnen sehr geläufig werden. Die fünfte heisse ZT; die sechste HT; die siebende TT, oder M, und so weiter.

Diese Anordnung, der Bedeutung der Ziffern, heißt die **Decimalordnung**. Eine Ziffer in der Stelle E, heißt eine Ziffer in der ersten oder untersten Zahlwürde; eine Ziffer in der Stelle Z, hat die zweyte Zahlwürde; eine Ziffer in der Stelle H, hat die dritte Zahlwürde; eine Ziffer in der Stelle T, hat die vierte Zahlwürde, und so giebt es auch Ziffern, weiter zur Linken, von der sechsten, siebenden, achten, neunten, zehnten, eilften, zwölften, dreyzehnten, Zahlwürde, u. s. w.

In dieser Decimalordnung, bedeutet jede Ziffer in ihrer Stelle, **zehnmal so viel**, als sie bedeuten würde, wenn sie in der nächsten geringern Stelle stünde, oder die nächste geringere Zahlwürde hätte.

Es geschicht aber oft, daß eine grosse Anzahl, welche durch Ziffern, die in Decimalordnung stehen, angezeigt werden soll, zwar einige Ziffern von hoher Zahlwürde, aber keine von dieser und jener geringern Zahlwürde, erfordert. z. E. Die Anzahl vier tausend und zwanzig, erfordert eine Ziffer in der Stelle T, und in der Stelle Z; aber keine in der Stelle H, und keine in der Stelle E. Wollte man nun diese beyden Stellen, welche keine Ziffern haben, leer lassen, und schreiben 42, so würde die Ziffer 4 sowohl, als die Ziffer 2, ihre gehörige Zahlwürde nicht haben, um die erwehnte Anzahl auszudrücken. Man muß also in solchen und gleichen Umständen eine Vice-Ziffer haben, wodurch man die sonst ledigen Stellen bedeckt; und diese Vice-Ziffer ist die Nulle, oder (°). Man muß also die erwehnte Anzahl schreiben, 4020, das ist 4‴ + 2′

§ 22.

Hier gewöhne man die Lernenden folgende Zahlen zu schreiben, wenn man ihnen die Worte sagt. 1. 10. 100. 1000. 2. 20. 200. 2000. 3. 30. 300. 3000. 4. 40. 400. 4000. So bis 9. 90. 900. 9000. Alsdann, 20. 24. 36. 19. 99. 86. 54. Hierauf, 100. 210. 258. 903. 640. u. a. d.

Hierauf 3000. 9009. 9099. 9999. 4444. 1111. 6040. 6400. 7302. u. a. d. Alsdann sind sie geübt, bis 9999 zu schreiben.

Wenn sich nun die Anzahl über 9999 erstreckt; so sage man den Lernenden, daß sie sich Anfangs

nur um die Anzahl der Tausenden bekümmern, und zugleich Anfangs vergessen dürften, daß es Tausende wären, so verstehen sie ja, bis 9999. Tausende zu schreiben. Wenn sie also 9999, oder überhaupt die Zahl der Tausende geschrieben haben: so dürfen sie nur dafür sorgen, daß nach der schon geschriebnen Zahl, oder vielmehr nach den schon geschriebnen Ziffern, noch 3 Ziffern oder Vice-Ziffern folgen: so ist die geschriebne Zahl, in die Zahlwürde der Stelle T erhoben, und dadurch zu Tausenden gemacht.

Nach dieser Anmerkung übe man sie, folgende Zahlen, wenn sie ihnen vorgesprochen werden, schriftlich auszudrücken. 17001. 17302. 30020. 36400. 36009. 11111. 99999. 100000. 200004. 200040. 300400. 302000. 608040. 1000000. 2000005. 2000050. 3000600. 3004000. 6007030. 6400500. 7522608. 9000003. 9999999. Hierauf lehre man sie, die siebende Ziffer, welche Tausende von Tausenden anzeigt, **Millionen** zu heissen, und erst die **Millionen** zu schreiben, alsdann nur dafür zu sorgen, daß die letzte der schon geschriebenen Ziffern, durch Zusatz der Ziffern und Nullen, die siebende vom Ende werde. So werden sie durch Uebung bald lernen eine Zahl schreiben, die eine Anzahl Millionen enthält. Diejenige Ziffer nun, welche Tausende von Tausend Millionen, oder Millionen von einer Million heissen sollte, heisset **Billionen.** Folglich drückt die dreyzehnte Ziffer Billionen aus, die 20ste Trillionen, die 27ste Quadrillionen, die 34ste Quinquillionen, u. s. w.

So

So lernt man ausgesprochne Zahlen durch Ziffern in Decimal-Ordnung schreiben.

§ 23.

Aber man muß auch geschriebene Ziffern nach der Gewohnheit auszusprechen wissen, z. E. 10. 13. 25. 30. 36. 50. 55. 90. 99. 100. 200. 403. 430. 555. 111. 999. 1010. 4020. 4444. 5003. 16000. 17000. 90300. 90301. 451000.

Sind der Ziffern viele, und man will ihre Bedeutung aussprechen; so theile man sie von hinten in Classen von 3 Ziffern, durch Striche oder Commata, z. E.

An statt 4567000837
schreibt man 4,567,000,837

Ueber die Ziffer die das zweyte Comma hinter sich hat, mache man einen Punct; über die Ziffer, die das vierte Comma über sich hat, mache man zwey Puncte; so auch beym sechsten Comma drey, beym achten vier Puncte, u. s. w. Man lese von vorne bis an ein Comma, spreche Tausend, wo das Comma ohne Puncte vorkommt; man spreche Million, wo ein Punct vorkömmt; Billion, wo zwey Puncte vorkommen, u. s. w. alsdenn wird man die geschriebene Anzahl gehörig aussprechen, z. E. An statt:

145608040006327985463008,

schreibe man:

$145,60\ddot{8},040,00\dot{6},327,98\dot{5},463,008.$

Man spreche 145 Tausend, 608 Trillion; 40

Tausend und 6 Billion; 327 Tausend 985 Million; 463 Tausend, und 8.

Man darf aber die Jugend, oder die Anfänger hiermit nicht quälen, weil so grosse Zahlen selten ausgesprochen werden.

§. 24.

Es mögen H und N zwey Ziffern bedeuten, welche in der Decimalordnung dicht neben einander geschrieben sind, so, daß N eine Ziffer von niedrigerer Zahlwürde; H eine Ziffer von der nächsten höheren Zahlwürde sey. z. E. Wenn N Hunderte bedeutet; so bedeutet H Tausende. Bedeutet H Zehntausende; so bedeutet N Tausende. Bedeutet H Zehnel; so bedeutet N Einel.

Aus der Decimalordnung erhellet, daß H und N, wenn sie neben einander stehen, so viel bedeuten, als H + N. z. E. $342 = 3'' + 4' + 2^{\circ}$.

Eben aus derselben Decimalordnung ist klar, daß $H + N = (H - 1) + (N + 10)$. So auch $H + N = (H - 2) + (N + 20)$. So auch $H + N = (H - 3) + (N + 30)$. Und aus gleicher Ursache ist $H + N = (H + 1) + (N - 10) = (H + 2) + (N - 20) = (H + 3) + (N - 30)$ u. s. w. z. E. $36 = 2' + (16^{\circ})$. So auch $430 = 4'' + 3' = 2'' + (23') = 2'' + (22') + (10^{\circ}) = 3'' + (12') + (10^{\circ}) = 3'' + (11') + (20^{\circ})$. So auch $804 = 8'' + 4^{\circ} = 6'' + (20') + 4^{\circ} = 4'' + (40') + 4^{\circ} = 4'' + (38') + (24^{\circ}) = 7'' + (8') + (24^{\circ}) = 7'' + (10') + 4^{\circ} = 8'' + 4^{\circ} = 804$.

Dieses wird noch besser verstanden werden, wenn man sich durch eine Erdichtung vorstellt, daß man grössere einzelne Zifferu hätte, als die Ziffer 9 ist. So liessen sich einzelne Ziffern denken, die bis Hundert giengen. Nun hat man zwar so grosse einzelne Ziffern nicht, aber man darf eine jede zusammengesetzte Ziffer, z. E. 14, wenn man sie in die Parenthese schließt, wie (14), als eine einfache Ziffer ansehen. Auf solche Weise lassen sich schreiben, vier und zwanzig Einel durch (24°); 250 Zehnel durch (250′); sechs und dreyßig Hunderte durch (36″). So bedeuten (451‴) eigentlich 451 Tausende.

§ 25

Nun ist alles gelehret worden, was zur völligen Einsicht in die Addition grosser Zahlen gehöret, wenn sie in Decimal-Ordnung geschrieben sind.

Die ganze **Ausübung dieser Addition** wird in folgenden Sätzen beschrieben:

1) Man nehme Karten, oder etwas, das Karten gleich gilt, mit einem Worte, Blätter, deren einige nur einen Punct, einige zwey, einige drey, und so bis neun Puncte haben. Man mische diese Blätter, so, daß bald eins von zwey, bald eins von drey, bald eins von sechs Puncten vermischt vorkommen. Man gebe denen Lernenden anfangs eine Zahl, bald diese, bald jene, z. E. Bald 1, bald 8, bald 50, bald 76, bald 100, bald 382 u. s. w. Man sage ihnen, daß sie zu dieser gegebenen Zahl, die Zahl der Puncte

des ersten Blatts; zu dieser Summe, die Zahl des andern Blatts, zu der neuen Summe, die Zahl des dritten, Blattes, durch Vorwärtszählen, zulegen sollen, u. s. w. Hiedurch wird die Fertigkeit die Addition bey Neben-Theilen zu verrichten, deren keiner über 9 ist, leicht erhalten.

2) Hernach gewöhne man sie, jedesmahl 10 zuzulegen. z. E. 1, 11, 21, 31, 41; oder 2, 12, 22, 32; oder 9, 19, 29, 39; oder 111, 121, 131, 141; oder 1000, 1010, 1020, 1030, u. s. w. Die Fertigkeit in dieser leichten Addition, muß noch vor dem Anfange der ernsthaften Unterweisung in der Rechenkunst, noch ehe die Kinder Zahlen und Buchstaben kennen, verursachet werden.

3) Sind viele Neben-Theile zu addiren, davon einige, Ziffern von höherer Zahlwürde, andere, blos Ziffern von der geringsten Zahlwürde, und also nur Einel enthalten; so gewöhne man sich, zuerst alle darinnen vorkommenden Ziffern von der letztern Art zusammen zu addiren, und dadurch die Anzahl derer zu addirenden Neben-Theile zu vermindern, indem man einen grössern, anstatt vieler kleinern, setzet. z. E. Es seyn zu addiren, 52+9+62; so denke man anfangs anstatt dessen lieber, 61+62. Anstatt 112+8+314+6+44+9+2022+7, denke man lieber, 112+314+44+2022+(8+6+9+7), oder 112+314+44+2022+30. Mit einem Worte, wenn unter andern grössern Neben-Theilen auch

einige

einige kleine, die nur 9 und unter 9 sind, vorkommen; so ist es bequem, erst alle leztern durch Denken in eine Summe zu verwandeln, ehe man die rechte Hauptsumme aller Theile sucht.

4) Alsdann hat man nur noch zu addiren, lauter solche Neben-Theile, davon ein jeder über 9 ist. Bey solchen Additionen, setze man die Neben-Theile so unter einander, daß alle Einel unter der Stelle E perpendiculár herunter stehen; so auch alle Zehnel unter der Stelle Z; alle Hunderte, unter der Stelle H; alle Tausende unter der Stelle T; alle Zehn-Tausende unter der Stelle ZT; alle Hundert-Tausende unter der Stelle HT; alle Millionen unter der Stelle M, u. s. w. Dieses alles erhält man ohne Ueberlegung, wenn man den ersten Neben-Theil von vorn hinschreibt; den zweyten, den dritten, den vierten, und jeden folgenden von hinten zu. z. E. 4520 + 16812 + 25 + 60080004 + 300 + 99 + 15364. Schreibet in Ordnung:

4520.
16812.
25.
6080004.
300.
99.
15364.

Ich nenne dieses Hinschreiben der Neben-Theile, die Vorbereitung zur Addition. Ist diese geschehen; so fangt entweder von vorne an, erst die

Ziffern von der höchsten Würde, und darauf allmälig immer die Ziffern von geringerer Würde zu addiren, und setzet jedesmal die Summe unter diejenige Stelle, deren Ziffern ihr addirt habt, und, wenn eine solche Particulär-Summe nicht anders, als durch eine zusammengesetzte Ziffer auszudrücken ist, so schließt dieselbe in eine Parenthese, und macht sie dadurch zu einer einfachen. Oder, fangt bey den Ziffern der niedrigsten Würde, also bey den Eineln an zu addiren, und geht so allmälig weiter, zu den Reihen derer Ziffern, welche eine höhere Würde haben. Ihr mögt thun, welches von beyden ihr wollt; so bekommt ihr unter jeder Perpendiculär-Reihe einerley Particulär-Summe. Wenn ihr nun die Decimalordnung versteht, und jede Particulär-Summe, in derjenigen Würde denkt, die sie vermöge ihrer Stelle hat; so könnt ihr nicht zweifeln, daß eure gesuchte Hauptsumme gleich sey der Summe aller dieser so gedachten Particulär-Summen. Denn die Hauptsumme ist ja das Ganze, worinnen alle zuerst gegebenen Neben-Theile enthalten sind. Diese Neben-Theile sind, wenn ihr Ziffern von gleicher Würde zusammen denkt, gleich denen darunter geschriebenen Particulär-Summen, welchen zusammen genommen also, auch die gesuchte Hauptsumme gleich seyn muß. Ihr mögt nun von der vornehmsten oder geringsten Reihe zu addiren anfangen; so bekommt ihr nach der Vorbereitung zur Addition der obgesagten Neben-Theile folgende Particulär-Summen.

			4	5	2	0
		1	6	8	1	2
					2	5
6	0	8	0	0	0	4
				3	0	0
					9	9
		1	5	3	6	4
(6) +	(0) +	(10) +	(15) +	(19) +	(20) +	(24)
(TT)	(HT)	(ZT)	T	H	Z	E.

Wenn nun in einer Particulär-Summe, eine zusammengesetzte Ziffer vorkömmt, wie in dem obigen Exempel fast durchgängig geschicht; so dürft ihr ja einer Particulär-Summe das nehmen, was ihr der andern gebt, und die Hauptsumme wird dadurch nicht verändert werden. Nehmt also die vordersten Ziffern einer Particulär-Summe weg, so daß nur die hinterste Ziffer in derselben bleibe; die weggenommenen Ziffern addirt zu den Ziffern der nächsten vornehmeren Particulär-Summe; so habt ihr nicht die Grösse, sondern nur die Gestalt eurer Hauptsumme verändert, (§. 23.) indem die versetzten Ziffern durch die Versetzung ihre Zahlwürde unverändert behalten.

Ihr bekommt dadurch an Statt:

	(6) +	(0) +	(10) +	(15) +	(19) +	(20) +	(24)
erstlich	(6) +	(0) +	(10) +	(15) +	(19) +	(22) +	(4)
hernach	(6) +	(0) +	(10) +	(15) +	(21) +	(2) +	(4)
darauf	(6) +	(0) +	(10) +	(17) +	(1) +	(2) +	(4)
weiter	(6) +	(0) +	(11) +	(7) +	(1) +	(2) +	(4)
alsdann	(6) +	(1) +	(1) +	(7) +	(1) +	(2) +	(4)
oder	6	1	1	7	1	2	4.

Aber diese weitläuftigen Veränderungen werden verhütet, wenn man sie allesammt auf einmal anstellet, und jedesmal die in die vornehmere Classe zu versetzende Ziffern im Sinne behält, und zu den Ziffern der folgenden Classe addirt, z. E.

4	5	6	8	3	2	1	Erster Nebentheil
	3	2	5	4	3	0	Zweyter Nebentheil
			6	7	8	9	Dritter Nebentheil
3	2	9	8	7	9	8	Vierter Nebentheil
		4	5	6	7	7	Fünfter Nebentheil
					6	7	Sechster Nebentheil
				3	2	9	Siebender Nebentheil
			9	9	8	7	Achter Nebentheil
1	2	4	4	4	4		Platz für die zu versetzenden Ziffern
8	2	5	5	3	9	8	Die Hauptsumme.

Ja man darf die zu versetzenden Ziffern gar nicht schreiben, sondern nur denken, und doch zur folgenden Classe addiren, z. E.

4568321	
325430	
6789	
3298798	Die Nebentheile
45677	
67	
329	
9987	
8255398	Die Hauptsumme.

Dieses ist die gewöhnlichste und kürzeste Art zu addiren, wobey man, wenn man sie begriffen hat,

bleiben

bleiben muß. Alles Gesagte ist den Unerfahrnen erst an leichtern, und hernach an schwerern und zusammengesetzten Exempeln zu zeigen.

§ 26.

Wenn die Anfänger, des Addirens gewohnt sind, so hat man sie durch dazu eingerichtete Exempel aufmerksam zu machen, daß sie überhaupt folgende Wahrheit einsehen: **Sobald viele Nebentheile addirt werden sollen, die allesammt gleichviel Nullen hinter sich haben;** so ist die Hauptsumme nicht anders, als sie seyn würde, wenn die Nullen nicht da wären, nur mit der einzigen Veränderung, daß man so viel Nullen, als alle Nebentheile gemeinschaftlich haben, zu der Hauptsumme setzen muß. Daher ist 45300 + 7600 + 700, so viel als 453 + 76 + 7, oder als 536, wenn man zwey Nullen hintersetzt, und 53600 schreibt.

§ 27.

Ich nenne eine **harmonische Addition**, wenn die zu addirenden Nebentheile allesammt gleich groß sind, z. E. 5 + 5 + 5, oder 40 + 40 + 40, oder 6335 + 6335 + 6335 + 6335, u. s. w.

Wenn in einer harmonischen Addition ein Nebentheil sich mit einigen Nullen schließt; so schliessen sich alle mit eben so vielen Nullen, und die Summe ist eben so, als sie seyn würde, wenn diese Nullen allen Theilen fehleten, nur daß man der Hauptsumme diese Nullen anhängen muß, z. E. 35500 + 35500 + 35500 + 35500, ist eben so

viel

viel als 355+355+355+355, oder als 1420, wenn man nur dieser Summe noch zwey Nullen anhängt, und 142000 schreibt. So auch 40+40+40, ist so viel als 4+4+4, oder als 12, mit einer Nulle, das ist, als 120.

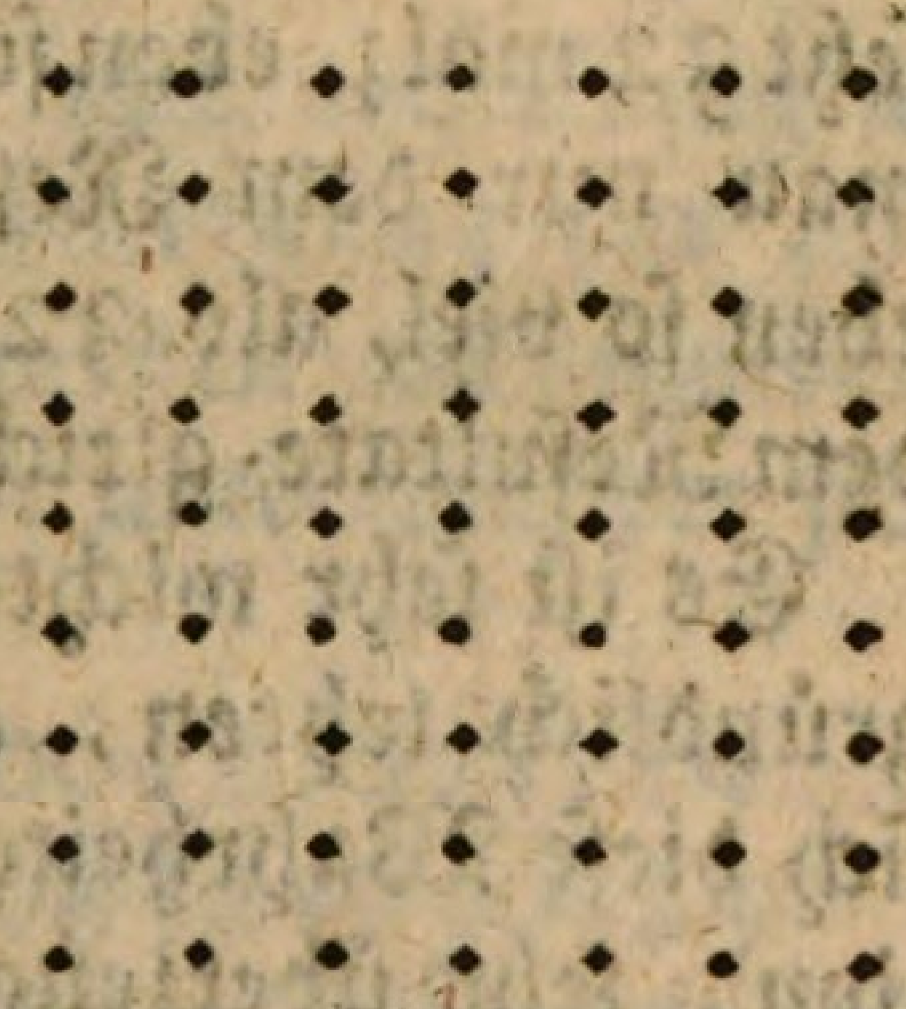
Wenn jemand euch sagt, daß ihr eine Zahl, z. E. X, harmonisch addiren, und ihre Summe suchen sollt; so muß er euch zugleich sagen, wie vielmahl ihr X, und X und X unter einander setzen sollet, um sie zu addiren. Diese Zahl, wodurch die Menge der unter einander zu setzenden X, angezeigt wird, heisse M. Bey jeder harmonischen Addition, kömmt also ein X und ein M vor. X heisse die **Hauptzahl**, und M die **Nebenzahl**, z. E. Wenn ich 42 dreymal setzen und addiren soll; so ist 42 mein X, oder meine Hauptzahl; 3 ist mein M oder meine Nebenzahl.

X und M mögen allerley Zahlen seyn, welche man wählen will. Man addire X, so vielmal gesetzt, als M es verlangt. Man gebe Acht auf die Summe. Nun kehre man die Operation um, und mache sein gewähltes X zur Nebenzahl, und das gewählte M zur Hauptzahl; man addire; man vergleiche diese Summe mit jener: sie werden einander gleich seyn, z. E. 3+3+3+3+3+3+3+3+3+3, das ist 3, zehnmal gesetzt, ist 30. Was ist denn 10+10+10, oder 10 dreymal gesetzt? Auch 30.

Daß dieses mit allen Zahlen so sey, erhellet aus folgender Betrachtung. Indem ich X so vielmal setze, als die Zahl M fordert; so mache ich jede Einheit, welche in X ist, zu einem M, und die

Summe

Summe so vieler M ist also meine Hauptsumme. Und indem ich M so vielmal setze, als X fordert; so setze ich M so vielmal, als X Einheiten hat. Hiedurch wird auch eine jede Einheit des X, zu einem M gemacht. In beyden Fällen sind gleichviel M. Die Summen müssen also wohl gleich seyn. Dieses will ich sehr sinnlich erläutern. Man stelle sich X als eine Anzahl Puncte vor, die in einer Horizontal-Reihe neben einander liegen. Man stelle sich M vor, als eine Anzahl Puncte, die in einer Vertical-Reihe unter einander stehen, z. E. Sieben Puncte liegen in der Horizontal-Linie; Neun Puncte in der Vertical-Linie. Addire ich nun Sieben neunmal, so bekömmt ein jeder Punct in der Horizontal-Linie, noch acht andere Puncte unter sich. Kehre ich nun die Fläche, worauf die Puncte stehen, so um, daß die vorige Vertical-Linie, die jetzige Horizontal-Linie werde, so finde ich oben 9, neben einander stehende, Puncte, davon jeder noch 6 andere unter sich hat. Und also sind die 9 Puncte, siebenmal gesetzt und addirt, gleichwie vorhin 7 Puncte neunmal gesetzt und addirt waren. Und doch sind in einem Falle nicht mehr, nicht weniger Puncte, als in dem andern. Und also sind die Summen, davon die erste aus X, gesetzt M mal entsteht; und wovon die andre aus M, gesetzt X mal entsteht, einander gleich. Denn man darf bey jeder harmonischen Addition, sich eine solche



Hori-

Horizontal-Linie und Vertical-Linie von Puncten gedenken.

Wenn also bey der harmonischen Addition, die Nebenzahl sich mit Nullen schließt, so darf man sie sich als die Hauptzahl denken, und man weiß alsdann, daß die Summe sich wenigstens mit so vielen Nullen schliesse, als die gedachte Zahl hat; und daß die Summe ohne diese Nullen, eben eine solche Gestalt habe, als sie haben würde, wenn jener Zahl die gedachten Nullen fehlten, z. E. 32, gesetzt 3000 mal und addirt, ist eben so viel, als 3000, gesetzt 32 mal; eben so viel als 3, gesetzt 32 mal, wenn man nur dem Resultate drey Nullen anhängt; eben so viel, als 32, gesetzt 3 mal, wenn man nur dem Resultate gleichfalls 3 Nullen anhängt.

Es ist sehr wichtig, daß sowohl derjenige, der gründlich lehren, als der gründlich lernen will, sich diese Wahrheiten von der harmonischen Addition, sehr überzeugend und geläufig mache, weil er sonst die Einsicht in die Multiplication, folglich in die Division, also in die ganze Rechenkunst, vergeblich suchen wird, und die Resultate seines Rechnens allemal auf guten Glauben für wahr annimmt, und dadurch unzählicher Vortheile der eignen Einsicht entbehret.

§. 28.

Wer zu addiren versteht, der wird fast in einem Augenblicke auch die größten Zahlen nach der Decimalordnung subtrahiren lernen. Denn die Hauptsumme ist (§ 16.) der Summe des Abzuges und des Restes gleich, versuchet also, den

Abzug

Abzug zu irgend einer solchen Zahl zu addiren, daß die kommende Summe der vorausgesetzten Hauptsumme gleich sey. Diese Zahl ist euer Rest, oder eure Differenz, welche ihr durch Subtraction suchet.

Die Hauptsumme sey H, der Abzug sey A. Also ist (H—A) die Zahl, die ihr durch diese Subtraction suchet. Stellet euch vor, sowohl H als A bestehen beyderseits aus Nebentheilen, die in Decimalordnung neben einander gesetzt sind.

Schreibet die Hauptsumme und den Abzug so untereinander, wie in der Vorbereitung zur Addition (§ 25). Alsdann werden allenthalben Ziffern von gleicher Zahlwürde untereinander stehen. z. E.

Die Hauptsumme	12608001100003219
Der Abzug	543268321050023

Nennet den vornehmsten Theil des Abzuges nach der Regel der Decimalordnung mit dem Buchstaben a; den zweyten b; den dritten c; den vierten d, u. s. w.

Schreibet anfangs alle Ziffern der Hauptsumme, welche eine vornehmere Zahlwürde haben, als a hat, in den Anfang des Restes, welchen ihr sucht. Ferner sucht a zu addiren mit einer Zahl, wodurch a der darüber stehenden Ziffer in der Hauptsumme gleich wird, und schreibt die gefundene Zahl darunter in den Rest. Verfahrt eben so bey b, bey c, bey d, u. s. w. So ist, (wenn nicht eine gewisse Schwierigkeit Statt findet, davon ich alsobald reden will), die Subtraction verrichtet,

richtet, und der Rest gefunden. Denn alsdann ist in jeder Zahlwürde der Theil des Abzuges durch den Zusatz, der im Reste steht, zu der Grösse der darüber stehenden Ziffer in der Hauptsumme, erhoben. Daher man sicher ist, daß, wenn man Rest und Abzug wieder addirte, die Hauptsumme hervorkommen würde, und also der gefundene Rest der rechte Rest sey. z. E.

Haupsumme		98659321
Abzug	—	35211
Rest	—	98624110

In diesem Exempel durfte man die Subtraction auf beschriebene Art von vorne anfangen, und fand keine Unbequemlichkeit.

Aber diese Unbequemlichkeit wird sich finden, so bald irgend eine oder mehr respective Ziffern in der Hauptsumme kleiner sind, als die darunter stehenden respectiven Ziffern des Abzuges. Wie findet man in solchem Falle eine Ziffer, die, addirt mit der Ziffer des Abzuges, der respectiven Ziffer in der Hauptsumme gleich sey?

Ich will ein solch Exempel hinsetzen, um deutlicher zu zeigen, wie man verfahren müsse. Es sey

Die Hauptsumme = 639
Der Abzug : : = 572.

Die mittelste oberste Ziffer ist kleiner, als die mittelste unterste Ziffer. Aber ich darf mir ja diese Hauptsumme auch in folgender Gestalt denken, (5)(13)(9). Setze ich nun hier den Abzug

572 ordentlich darunter; so ist nicht mehr die vorige Schwierigkeit, sondern ich subtrahire,

von der Hauptsumme 5(13)9
den Abzug — 5 7 2. Alsdann bleibt
der Rest — 6 7.

Nun ist kein Zweifel, daß eine jede in Decimalordnung geschriebene zusammengesetzte Zahl A, unter welcher eine kleinere, gleichfalls in Decimalordnung gesetzte Zahl B, geschrieben steht, durch eine solche Versetzung einer vornehmern Einheit in die nächste geringere Classe, wo sie 10 bedeutet, leichtlich eine solche Gestalt bekomme, daß jede in A stehende Ziffer, nicht kleiner sey, als die darunter stehende respective Ziffer in der Zahl B. Dieses müßte man einem Unerfahrnen, der wenig Nachdenken hat, in verschiednen Exempeln zeigen.

Nun stelle man sich vor, daß die Versetzung einer Einheit aus der vornehmern in die geringere Classe, wo dieselbe 10 bedeutet, angezeigt werde, durch einen über der Ziffer der vornehmern Classe geschriebenen Punct. Was giebt alsdann der, in der folgenden Zahl 532 vorkommende Punct, derselben für eine Gestalt? Keine andere, als diese, 4(13)2.

Also ist die bequemste Subtraction, wobey am wenigsten zu schreiben vorfällt, diese, daß man von hinten zu die Subtraction anfange, und, so bald in der Hauptsumme eine, für ihre respective Ziffer zu kleine, Ziffer vorkömmt, einen Punct über der nächst vorhergehenden Ziffer der Haupt-

summe mache, und sich dabey dieses gedenke, daß die anfangs zu kleine Ziffer, nunmehr um 10 grösser, und daß die vorhergehende punctirte Ziffer um 1 kleiner geworden sey. z. E.

Die Hauptsumme 54132
Der Abzug . . 7071

Der Rest . . 47061

Das Schwerste, was dem Anfänger dabey zu begreifen vorkömmt, ist, wenn die punctirten Ziffern Nullen sind. Aber dabey muß man ihm begreiflich machen, daß nicht eigentlich die Nulle punctirt werde, sondern die Zahl 10, welche in die Stelle der Nulle tritt, wenn man die vor ihr vorhergehende Ziffer punctirt. Woraus zugleich erhellet, daß eine punctirte Nulle, eine 9 vorstelle. z. E.

Die Hauptsumme 403
Der Abzug : : 276

Der Rest : : 127

Dieses Exempel ist völlig gleich dem folgenden:

Die Hauptsumme 3(10)3
Der Abzug : : 2 7 6

Und dieses ist abermals folgendem gleich:

Die Hauptsumme 39(13)
Der Abzug : : 2 7 6

Der Rest : : 1 2 7

Ich

Ich will nur noch ein Exempel geben.

Die Hauptsumme	760005
Der Abzug : :	37052
Der Rest : :	722953.

Denn jene Hauptsumme 760005 ist eben so viel, als 75(10)005 = 759(10)05 = 7599(10)5. Setzet man nun unter diese Hauptsumme vorigen Abzug. z. E.

Die Hauptsumme	7599(10)5
Der Abzug : :	370 5 2. So kömmt
Der Rest : :	7229 5 3, welcher der-

selbe vorige Rest ist.

Und eben dieses ist die kürzeste und gewöhnlichste Art der Subtraction, worbey man beständig bleiben muß, sobald man sie begriffen hat.

Wenn man aber eine Reihe Zahlen mehr schreiben, oder punctirte Zahlen als um 1 vermindert denken wollte; so liesse sich auch alle Subtraction von vorne anfangen. Man dürfte nur jedesmal, wenn die Particulärsumme, welche aus einem Theile im Abzuge, und aus einem respectiven Theile im Reste, erwächst, 10, oder 11, oder 12, oder 13, oder 14, oder 15, oder 16, oder 17, oder 18 wäre, die vorhin schon gefundne Ziffer des Restes, punctiren, oder als um 1 vermindert ansehen. Exempel werden alles erklären.

$$\begin{array}{r} 4326 \\ 1713 \\ \hline 3\cdot613 \text{ oder} \\ 2613 \end{array}$$

So auch
$$\begin{array}{r} 400012 \\ 4591 \\ \hline 4\dot{0}\dot{6}521 \text{ oder} \\ 395421. \end{array}$$

Solche Kenntnisse sind zwar in der Ausübung nichts nütze, geben aber eine tiefe Einsicht in die Zahlen-Wissenschaft.

Drittes Hauptstück.

Von der Multiplication, und insonderheit bey reinen Integral-zahlen.

§ 29.

Man sagt, daß eine Zahl H, der Zahl N gemäß gesetzt werde, wenn man für jede Einheit, die in N ist, die Zahl H einmal in Gedanken setzt, und wenn man also, wofern N ein Bruch, und weniger, als eine Principal-Einheit, seyn sollte, die Zahl H weniger als einmal setzt.

Man

Man setzet H, dem Bruche N gemäß, wenn man von H einen solchen Theil setzet, als N von der Principal-Einheit ist, oder wenn man von H solche Theile, als der Nenner des Bruchs anzeigt, so oft setzt, als es dem Zähler gemäß ist. Wenn man 8, der Zahl $\frac{3}{4}$ gemäß, setzen sollte, so müßte man von 8 den vierten Theil dreymal setzen, oder 6 denken.

Die Zahl H, welche der Zahl N gemäß soll gesetzt werden, heißt der **Hauptfactor**. Die Zahl N, heisset der **Nebenfactor**.

Multipliciren heißt, zwey Zahlen als solche ansehen, deren eine, der andern gemäß, soll gesetzt werden, und alsdann das Gesetzte auf die beste Art finden, und als eine einzige Zahl ausdrücken. Oder kürzer: **Multipliciren** heißt, einen Factor dem andern gemäß setzen, und das Gesetzte ausdrücken.

Das Resultat der Multiplication, oder der Factoren, heißt das **Product**. z. E. Wenn 4 und 2 die Factoren sind; so ist 8 das Product.

Das **Multiplicationszeichen**, welches zwischen den Factoren steht, und welches anzeigt, daß man multipliciren soll, und daß die damit bezeichneten Factoren schon dem Producte gleich gelten, ist (x). z. E. $3 \times 2 = 6$. Man lese: 3, multiplicirt durch 2, ist 6. So auch $A \times B$, oder, A multiplicirt durch B. Doch, wenn Buchstaben ohne Zeichen zusammenstehen; so ist es ein Zei-

 chen,

chen, daß sie Factoren sind, und das Multiplicationszeichen ausgelassen sey. z. E. AC=AxC.

§ 30.

Wenn die Factoren reine Integralzahlen sind; so ist die **Multiplication nichts anders, als eine harmonische Addition** (§ 27.). Das Product ist nemlich nichts anders, als die Summe, welche käme, wenn man einen der Factoren, welchen man wollte, zur Hauptzahl (§ 27), den andern zur Nebenzahl annähme, und diese harmonische Addition verrichtete. Es ist nur dieser einzige Unterschied, daß bey diesem Multipliciren eine kürzere und künstlichere Ausübung der Addition angewandt wird.

§ 31.

Wenn ein Factor 1 ist; so ist der andre Factor das Product. z. E. 4x1, oder 1x4 ist =4. Und überhaupt Ax1, oder 1xA, oder 1A, ist =A.

Und weil (§ 27.) es in der harmonischen Addition gleichgültig ist, welche Zahl man für die Hauptzahl ansieht; so sehn wir wenigstens schon von reinen Integralzahlen, daß es einerley sey, welchen Factor man für den Hauptfactor halten wolle. Also 4x2=2x4, 6x8=8x6. Und überhaupt AG=GA.

§ 32.

Es werden allerley Zahlen durch einander multiplicirt. 1) Reine Integralzahlen durch reine

reine Integralzahlen, z. E. 4×6, oder 50×63. 2) Brüche durch Brüche. z. E. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$, oder $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8}$. 3) Reine Integralzahlen durch Brüche. z. E. $4 \times \frac{3}{8}$, oder $\frac{3}{8} \times 4$. 4) Unreine Integralzahlen durch einander. z. E. $10\frac{1}{2} \times 15\frac{3}{4}$. 5) Eine reine Integralzahl durch eine unreine. z. E. $15 \times 2\frac{2}{7}$, oder $2\frac{2}{7} \times 15$. 6) Eine unreine Integralzahl durch einen Bruch. z. E. $4\frac{3}{4} \times \frac{3}{7}$. 7) Eine reine Integralzahl durch einen Bruch. z. E. $12 \times \frac{2}{7}$, oder $\frac{2}{7} \times 12$.

§ 33.

Wenn ihr drey, vier, fünf und mehr Factoren durch das Multiplicationszeichen verbunden seht, z. E. $4 \times 3 \times 2 \times 8 \times 9$, oder überhaupt BCDEG; so bedeutet dieses das letzte Product, welches kömmt, wenn ihr Anfangs die beyden ersten Factoren multiplicirt; darauf dieß Product durch den dritten Factor; dieses alsdann durch den vierten Factor (u. s. w.) zu multipliciren fortfahret. Doch ich will anfangs nur reden von der Multiplication zweyer Factoren, welche reine Integralzahlen sind.

§ 34.

Es ist höchst nützlich, die Producte derer Factoren, die nicht über 9 sind, auswendig zu wissen. Man finde sie also durch die Addition, und lerne sie. Was man alsdann lernet, heißt das **Einmal Eins.** z. E.

2	mal	2	ist	4
2	—	3	—	6
2	—	4	—	8
2	—	5	—	10
2	—	6	—	12
2	—	7	—	14
2	—	8	—	16
2	—	9	—	18
3	mal	3	ist	9
3	—	4	—	12
3	—	5	—	15
3	—	6	—	18
3	—	7	—	21
3	—	8	—	24
3	—	9	—	27
4	mal	4	ist	16
4	—	5	—	20
4	—	6	—	24
4	—	7	—	28
4	—	8	—	32
4	—	9	—	36
5	mal	5	ist	25
5	—	6	—	30
5	—	7	—	35
5	—	8	—	40
5	—	9	—	45
6	mal	6	ist	36
6	—	7	—	42
6	—	8	—	48
6	—	9	—	54
7	mal	7	ist	49
7	—	8	—	56
7	—	9	—	63
8	mal	8	ist	64
8	—	9	—	72
9	mal	9	ist	81

Auf solche Weise wird uns jedesmal das Gedächtniß die Producte der Factoren sagen, die unter 9 sind, z. E. $4 \times 2 = 8$. $6 \times 7 = 42$.

§. 35.

Wenn dieses zur Fertigkeit geworden ist; so gewöhne man die Lernenden, vermittelst des imaginirenden Verstandes, ohne Tafel, zwey Factoren zu multiplicieren, davon der eine zwar nur eine einzige Ziffer, aber viele angehängte Nullen hat; der andere aber die Ziffer 9 nicht über-

übersteiget, z. E. (40×3) (70×6) (7×400) (300×8) (5000×4) u. s. w. Das Product lehre man sie auf folgende Weise mit dem Verstande finden. Sie müssen sich erinnern, daß die Multiplication nichts anders als eine harmonische Addition sey (§. 27). Also ist z. E. (4000×8) oder (8×4000) nichts anders, als die Summe von 4000 + 4000 + 4000 + 4000 + 4000 + 4000 + 4000 + 4000. Wenn man nun diese Nebentheile achtmal unter einander schreibt, so bekömmt man in der Summe, hinten 3 Nullen, und vor ihnen, die Summe von 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4, oder das Product von 32. Also ist 4000×8, oder 8×4000 = 32000. So zu denken muß man sie bey allen solchen Zahlen gewöhnen. Nach einiger erworbenen Fertigkeit werden sie folgendes im Gedächtnisse wissen, z. E.

2	mal	10	ist	20
3	—	10	—	30
4	—	10	—	40
5	—	10	—	50
6	—	10	—	60
7	—	10	—	70
8	—	10	—	80
9	—	10	—	90
10	—	10	—	100

2	mal	20	ist	40
3	—	20	—	60
4	—	20	—	80
5	—	20	—	100
6	—	20	—	120
7	mal	20	ist	140
8	—	20	—	160
9	—	20	—	180
10	—	20	—	200

2	mal	30	ist	60
3	—	30	—	90
4	—	30	—	120
5	—	30	—	150
6	—	30	—	180
7	—	30	—	210
8	—	30	—	240
9	—	30	—	270
10	—	30	—	300

2	mal	40	ist	80
3	—	40	—	120
4	—	40	—	160
5	—	40	—	200
6	—	40	—	240
7	—	40	—	280
8	—	40	—	320
9	—	40	—	360
10	—	40	—	400

2	mal	50	ist	100
3	—	50	—	150
4	—	50	—	200
5	—	50	—	250
6	—	50	—	300
7	—	50	—	350
8	—	50	—	400
9	—	50	—	450
10	—	50	—	500

2	mal	60	ist	120
3	—	60	—	180
4	—	60	—	240
5	—	60	—	300
6	—	60	—	360
7	—	60	—	420
8	—	60	—	480
9	—	60	—	540
10	—	60	—	600

2	mal	70	ist	140
3	—	70	—	210
4	—	70	—	280
5	—	70	—	350
6	—	70	—	420
7	—	70	—	490
8	—	70	—	560
9	—	70	—	630
10	—	70	—	700

2	mal	80	ist	160
3	—	80	—	240
4	—	80	—	320
5	—	80	—	400
6	—	80	—	480
7	—	80	—	560
8	—	80	—	640
9	—	80	—	720
10	—	80	—	800

2	mal	90	ist	180
3	—	90	—	270
4	—	90	—	360
5	—	90	—	450
6	—	90	—	540
7	—	90	—	630
8	—	90	—	720
9	—	90	—	810
10	—	90	—	900

Es ist meine Absicht nicht, daß die Jugend mit Memorirung dieser Producte beschwert werde; sondern, daß sie bey dem Anblicke der Factoren versuchen, wie geschwind und richtig sie die Producte errathen.

Hier:

Hieraus ist überhaupt begreiflich, daß, wenn man wegen der vielen Nullen, auch auf der Tafel rechnen muß, das Product zweyer solcher Factoren, davon hier die Rede ist, richtig geschrieben werde, wenn man den einfachen Factor durch die erste Ziffer des andern multiplicirt, und dem Producte die Nullen anhängt, z. E. 6000000000 x 7 ist 42000000000.

§ 36.

Alsdann ist es Zeit, zu zeigen, wie ein Factor, so groß er auch seyn mag, durch einen andern Factor, welcher eine Rang-Einheit ist, multiplicirt werde. Ich nenne eine Rang-Einheit, 10, 100, 1000, 10000, und so ein jedes 1, das Nullen hat. Soll z. E. 345 multiplicirt werden mit 1000; so stellt euch vor, daß ihr 1000+1000 u. s. w., 345 mal unter einander schreibt, und addirt. Wie wird eure Summe aussehen? 3 Nullen wird sie am Ende haben, und die Ziffern 345 vor denselben. Die Summe wird 345000 seyn. Nun aber, euer Product, welches aus den Factoren 345 x 1000, oder 1000 x 345, erwächst, ist nichts anders, als diese Summe; es ist auch 345000. Man mache sich allemal eine ähnliche Vorstellung, so oft man eine grosse Zahl durch eine Rang-Einheit, oder diese durch jene multipliciren soll: so wird man sich mit Ueberzeugung zur Regel machen, den einen Factor unverändert zu lassen, und ihm nur die Nullen, welche die Rang-Einheit hatte, beyzufügen. z. E. 4 x 10 = 40. 45 x 10 = 450. 10 x 67 = 670. 100 x 4 = 400. 9 x 100 = 900. 654 x 100 = 65400. 14 x 1000 = 14000. 100 x 66

x66 = 66000. 15000 x 1000 = 15000000. 54732 x 100000 = 5473200000. 100 x 100 = 10000. 550 x 10 = 5500.

§ 37.

Nunmehro ist der Lernende geschickt, sich in der Multiplication einer grossen Zahl durch eine einfache Ziffer zu üben. z. E. 365 x 7. Man sage ihm, daß, wenn ein Factor F, der aus Theilen A + B + C besteht, durch einen andern Factor, der G heissen soll, zu multipliciren ist, es eben so viel sey, als wenn A + B + C durch G zu multipliciren wäre. Das ist, es soll gesetzt werden AG + BG + CG. Und diese drey Producte muß man in eine Summe bringen, damit das Haupt-Product FG hervor komme. z. E. Da 62 = 6′ + 2°; so ist 62 x 9 = (6′ + 2°) x 9 = 6′ x 9 + 2° x 9.

Nun stelle man sich vor, daß in dem zusammen gesetzten Factor, die nach der Decimalordnung geschriebenen Theile, A + B + C + D sind. Soll man diese allesammt durch G multipliciren; so wird die Operation eine solche Gestalt haben:

$$\begin{array}{c} A + B + C + D \\ \hfill G \\ \hline AG + BG + CG + DG \end{array}$$

Man nehme nun Ziffern, so wird die Gestalt diese seyn

$$\begin{array}{c} 3 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \\ \hfill 5 \\ \hline (3x5) + (5x5) + (6x5) + (8x5) \end{array}$$

Zwar ist 3, hier nicht 3, sondern 3000, aber die

Stelle

Stelle des Particulärproducts ist auch die vierte. Zwar ist 5 in dem ersten Factor hier nicht 5, sondern 500, aber die Stelle des Particulär-Products ist auch die dritte. So auch 6 ist hier eigentlich 60, aber die Stelle des Particulär-Products ist auch die zweite. Euer Product 3568 x 5 ist also 3 5 6 8

5

(15)+(25)+(30)+(40)

Hebt die Parenthesen durch Versetzung auf, wie oben ist gelehret worden (§. 25.); so bekommt ihr:

1 7 8 4 0

Um aber die Mühe zu ersparen, wenn man die Einsicht hat, darf man die zu versetzenden Ziffern im Sinne behalten, oder Anfangs an einer Nebenstelle bemerken, bis man sie alsobald zu dem folgenden Particulär-Producte addirt. Also wird die Operation folgende:

3568
5

17840

Und eben also verfähret man, nach dieser erlangten Einsicht jedesmal, wenn grosse Zahlen durch eine einfache Ziffer zu multipliciren sind. Man darf aber mit den Lernenden nicht eher weiter gehen, als bis sie hierinnen eine grosse Fertigkeit erworben haben.

§ 38.

Ich nenne eine Rangzahl eine einfache Ziffer mit angehängten Nullen, z. E. 50, 400, 6000, 20000, u. s. w.

Wenn

Wenn eine grosse Zahl durch eine Rangzahl zu multipliciren ist; so stellet euch vor, daß die Rangzahl so oft unter einander geschrieben wäre, als der andere grosse Factor es erfordert, und daß alsdann addirt würde. Wie wird alsdann eure Summe beschaffen seyn? Sie wird so viel Nullen am Ende haben, als die Rangzahl hat, und vor diesen Nullen wird diejenige Summe stehen, welche kömmt, wenn ihr die erste Ziffer der Rangzahl so vielmal setzet und addiret, als der zweyte Factor fordert. Folglich wird vor den gesagten Nullen noch anzutreffen seyn, das Product aus der Multiplication des einen Factors durch die in der Rangzahl stehende erste Ziffer. Nun aber, euer gesuchtes Product ist nichts anders, als diese mit Nullen begleitete Summe. Wenn ihr also eine Zahl durch eine Rangzahl zu multipliciren habt; so bekümmert euch Anfangs um die Nullen der Rangzahl gar nicht; seht sie so an, als wenn sie eine einfache Ziffer wäre; und multiplicirt durch sie den andern Factor, wie ihr zuvor geübt seyd. Dem gefundnen Producte hängt die Nullen der Rangzahl an: so ist das rechte Product da, z. E. Sollte man 4568 durch 50000 multipliciren; so multiplicire man 4568 durch 5. Es kömmt 22840; man hänge noch die 4 Nullen der Rangzahl an, so ist das rechte Product 228400000. Daher pflegt die Operation bey diesen und ähnlichen Zahlen so angestellet zu werden:

4568	oder	4568
5(0000)		5(0000)
22840(0000)		22840(0000).

Diese

Diese Uebung muß ein Lernender gleichfalls, ehe er weiter geht, nicht verlassen, bis er eine grosse Fertigkeit erlangt hat.

§ 39.

Wenn der Factor F durch den Factor G multiplicirt werden soll, und G die Theile A+B+C+D hat; so ist es eben so viel, als wenn G durch (A+B+C+D) multiplicirt werden soll. Es soll also gemacht werden, FA+FB+FC+FD. Wenn nun die Theile des Factors G, in Decimal-Ordnung geschrieben sind; so ist D eine Ziffer von der untersten Zahlwürde. Ihr wißt (§. 37.) FD zu machen. Alle vorhergehende Ziffern des Factors G sind Rangzahlen. Ihr wißt also (§. 38.) FC, und FB und FA zu machen. Suchet also diese Particulär-Producte allesammt; schreibt sie zur Addition vorbereitet (§. 25.) unter einander: so habt ihr das Product von FG, z. E. 6732+459.

6732	oder	6732
459		459
60588		2692800
336600		336600
2692800		60588
3089988		3089988

Daß ein Geübter diejenigen Nullen weglassen dürfe, von denen er voraus sieht, daß ihr Weglassen das Resultat nicht verändert, ist kaum nöthig, zu erinnern. z. E. Ein Geübter schreibt obiges Exempel so:

6732

6732			6732
459		oder:	459
26928			60588
33660			33660
60588			26928
3089988			3089988

§. 40.

Gesetzt nun, einer der Factoren sey eine zusammengesetzte Rangzahl, welche verschiedne Ziffern und einige Nullen hat, so bekümmert man sich aus dem Grunde, welcher oben (§ 38.) angezeigt ist, um die Nullen anfangs gar nicht, sondern multipliciret so, als wenn sie nicht da wären. z. E.

345(00)	354
3	24(00)
103500	1416
	7080
	8496(00)

§ 41.

Soll man nun 2 Factoren multipliciren, welche sich beyde mit Nullen schliessen: so hat man ja das Product anzusehen, als ein mit den Nullen des ersten Factors geschlossenes Product, woran noch weiter die Nullen des andern Factors sollen angehängt werden. Also bekümmert man sich anfangs um alle angehängte Nullen beyder Factoren nicht; sondern multipliciret diejenigen Ziffern derselben, welche vor den Nullen

len stehen, und hängt dem so gefundnen Product, alle jene versäumte Nullen neben einander an: so ist das Product da. z. E.

$$\begin{array}{r} 365(000) \\ 22\quad(0) \\ \hline 730 \\ 7300 \\ \hline 8030(0000) \end{array}$$

§ 42.

Wenn Nullen in der Mitte des zweyten Factors vorkommen: so hat die Operation folgende Gestalt:

$$\begin{array}{r} 3689235 \\ 30003 \\ \hline 11067705 \\ 110677050000 \\ \hline 110688117705 \end{array}$$

§. 43.

Wenn man in zweyen Fällen gleiche Zahlen A und B hat, und jene Zahl A durch eine gewisse Zahl multiplicirt, ferner diese Zahl B durch eben dieselbe gewisse Zahl multiplicirt; so sind die Producte gleich. z. E. $4 \times 2 = (3 + 1) \times 2$. Oder wenn $F = G$; so ist $FA = GA$.

Wenn man in zweyen Fällen 2 gleiche Producte hat, und wenn man weiß, daß ein Factor,

woraus das erste Product entstanden ist, einem Factor, woraus das andere Product entstanden ist, gleich sey; so sind auch der zweyte Factor des ersten Products, und der zweyte **Factor des andern Products**, einander gleich. Oder wenn $FA = GA$; so ist $F = G$. z. E. $(3+5) \times 4 = 8 \times 4$. Also $(3+5) = 8$.

Wird hier und dort das Gleiche durch ungleiche Zahlen multiplicirt; so ist **dasjenige Product grösser**, dessen zweyter Factor grösser war.

Wenn hier und dort ungleiche Zahlen durch gleiche multiplicirt werden; so ist **dasjenige Product kleiner**, dessen erster Factor kleiner war. Dieses sind Grundsätze.

§ 44.

Indem man die Zahl A der Zahl B gemäß setzt, oder A durch B multipliciret, bekömmt man kein ander Resultat, als wenn man die Zahl B der Zahl A gemäß setzte, oder B durch A multiplicirte. Der Beweis ist für Anfänger zu schwer. Sie müssen es Anfangs glauben. Auch wird jedesmal die Verrichtung der Multiplication sie es lehren. Doch für Geübte will ich den Beweis führen.

1) **Es sey B eine Einheit.** Setzt man A der Zahl B gemäß; so setzt man bloß A, was A auch für eine Zahl seyn mag, z. E. $1 \times 1 = 1$. $10 \times 1 = 10$ $\frac{3}{4} \times 1 = \frac{3}{4}$. $2\frac{1}{4} \times 1 = 2\frac{1}{4}$. Ueberhaupt, $A \times B$ ist alsdann A. Nun setze man B oder 1, der Zahl A gemäß. Ist $A = 1$; so ist $A \times B = 1 \times 1$, weil auch $B = 1$ ist. Und $B \times A$ ist gleichfalls

falls 1×1. Also ist $B \times A$ in diesem Falle so viel, als $A \times B$. Ist A eine grössere Integralzahl, und ist $B = 1$; so ist $A \times B = A$. Setze ich nun in diesem Falle die Zahl B oder 1, der Zahl A gemäß; so setze ich 1 so vielmal, als A Einheiten hat, das ist, ich setze A. In diesem Falle ist also abermals $A \times B = B \times A$, beydes ist A. Ist A ein Bruch; so ist $A \times B$ oder $A \times 1$, nichts anders, als der Bruch A. Und wenn ich in diesem Falle $B \times A$ denke; so soll ich, weil A ein Bruch ist, von der Einheit, oder von B, solche Theile setzen, als der Bruch A, vermöge des Nenners, von der Einheit, hat, und so viele solcher Theile setzen, als der Zähler anzeigt. Das ist, ich soll von B dasjenige setzen, was A von der Einheit ist. A aber ist von der Einheit dasjenige, was der Bruch A selbst anzeigt, z. E. $\frac{3}{4}$ von 1, ist $\frac{3}{4}$. Da nun hier $B = 1$; so ist $B \times A$ derjenige Theil von der Einheit, der von der Einheit durch den Bruch A ausgedrückt wird. Ein solcher Theil von B wird also auch durch A ausgedrückt. Also in diesem Falle ist $B \times A = A$, also abermals so viel als $A \times B$. Ist A eine unreine Integralzahl; so ist $A \times B = A$. Nun sey A als eine unreine Integralzahl $= C + \frac{D}{E}$. Folglich $A \times B = \left(C + \frac{D}{E}\right) \times 1 = C + \frac{D}{E}$. Und $B \times A = 1 \times \left(C + \frac{D}{E}\right) = 1 \times C + 1 \times \frac{D}{E} = C + \frac{D}{E}$. Aus $A \times B$ und aus $B \times A$, kömmt also gleichviel.

2) Es sey B eine andre Integralzahl; so ist $A \times B = A \times 1 + A \times 1 + A \times 1 +$ u. s. w. kurz $(A \times 1)$

 $\times$ B.

x B. Und B x A = 1 x A + 1 x A + 1 x A + u. s. w. kurz (1 x A) x B. Nun ist (A x 1) = (1 x A) wie (No. 1.) erwiesen ist. Was findet man also bey der Vergleichung der beyden Zahlen (A x 1) x B und (1 x A) x B? Dieses, daß in jenem und diesem Falle gleiches durch gleiches multipliciret sey. Die Producte sind also gleich. (A x 1) x B = (1 x A) B. Jenes ist A x B, dieses ist B x A. Es ist also A x B = B x A; was auch A für eine Zahl, oder für einen Bruch, oder für eine unreine Zahl bedeuten mag, z. E. 3 x 4 = 4 x 3. $\frac{2}{3}$ x 2 = 2 x $\frac{2}{3}$. $4\frac{1}{3}$ x 3 = 3 x $4\frac{1}{3}$.

Anmerkung.

Wenn ein durch Factoren geschriebenes Product, (z. E. AB, oder 4 x 5) durch einen neuen Factor soll multipliciret werden; wenn man also setzen soll, (AB) C, oder (4 x 5) x 2; so bringt dreyerley Operation immer ein gleiches Product. Die erste ist, wenn wir in der gesagten Ordnung multipliciren; die zweyte ist, wenn wir den neuen Factor als den mittelsten ansehen, und also (AC) B, oder (4 x 2) x 5 setzen; die dritte ist, wenn A x (BC), oder 4 x (5 x 2) gesetzt wird. Ich sage die zweyte Operation ist der ersten gleich. Dieses erkennt man am deutlichsten, wenn man anfangs C als eine reine Integralzahl annimmt. Denn (AC) B = (A x 1) + (A x 1) + (A x 1) + (A x 1) + ... x B. Man soll nemlich (A x 1) so oft durch B multipliciren, als C Einheiten hat; das ist, man soll das Product AB so oft setzen, als C Einheiten hat. Und eben dasselbe geschicht in der ersten Operation. Macht man aber nach der dritten Operation anfangs das Product BC, um hernach die Zahl A dadurch zu multipliciren;

so setzt man $A \times (B \times 1 + B \times 1 + B \times 1 + \ldots)$, das ist, man multiplicirt A durch $(B \times 1)$, oder durch B, so oft, als C Einheiten hat, welches abermals die erste Operation ist. Also $(4 \times 5) \times 2 = (4 \times 2) \times 5 = 4 \times (2 \times 5)$. Gesetzt aber, C, oder der neue Factor, sey keine reine Integralzahl, sondern entweder ein Bruch, oder eine unreine Zahl; so ist C doch ein Theil irgend einer Summe, welche eine reine Integralzahl ist. z. E. $\frac{3}{4}$ ist ein gewisser Theil von 3, nemlich der vierte Theil. Und $2\frac{2}{3}$ ist ein gewisser Theil von 24, nemlich der neunte Theil. Da nun die Versetzung mit der Summe von den Brüchen, deren ein jeder C ist, geschehen durfte; so darf sie auch geschehen mit einem Theile dieser Summe, nemlich mit dem Bruche C. Daher ist $(4 \times 5) \times \frac{2}{5} = (4 \times \frac{2}{5}) \times 5 = 4 \times (5 \times \frac{2}{5}) = 8$. Und $(2 \times 3) \times 4\frac{1}{3} = (2 \times 4\frac{1}{3}) \times 3 = 2 \times (3 \times 4\frac{1}{3}) = 26$. Oder, um allgemein zu reden: Wenn man Zahlen durch einander multipliciren soll; so hat man die Freyheit, entweder von den beyden ersten Factoren die Multiplication anzufangen, und so durch die andern einzelnen Factoren fortzusetzen, oder erst aus dem mittelsten oder letzten Factoren Producte zu machen, und diese Producte durch die vordersten Factoren, oder durch Producte, die daraus gemacht sind, zu multipliciren.

Ich kehre zurück, zu dem Vorsatze, zu erweisen, daß AB in allen Fällen so viel sey, als BA.

3) **Es sey also B, oder der zweyte Factor, ein Bruch**, z. E. $\frac{M}{N}$. Wählt eine Integralzahl, welche eine Summe von vielen solchen Brüchen ist. Die Nebenzahl, welche anzeigt, wie vielmal ihr

$\frac{M}{N}$ setzen mußt, daß die Summe daraus werde, heisse Y. $\frac{M}{N} \times Y$ ist also eine Integralzahl. $A \times (\frac{M}{N} \times Y)$ ist also $= (\frac{M}{N} \times Y) \times A$. Das erste ist $(A \times \frac{M}{N}) \times Y$; das zweyte ist $(\frac{M}{N} \times A) \times Y$. Also $(A \times \frac{M}{N}) \times Y = (\frac{M}{N} \times A) \times Y$. Also $A \times \frac{M}{N} = \frac{M}{N} \times A$. Denn diese beyden Zahlen sind die ersten Factoren gleicher Producte, deren zweyte Factoren einander gleich sind. $\frac{M}{N}$ aber ist hier B, oder der zweyte Factor. Also auch in diesem Falle, wenn B ein Bruch ist, bleibt $AB = BA$. z. E. $8 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times 8$. Und $4\frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times 4\frac{1}{5}$.

4) **Ist nun B, oder der zweyte Factor,** eine unreine Zahl; so stelle man sie sich in der Gestalt $C + \frac{M}{N}$ vor. Also $AB = A \times (C + \frac{M}{N}) = AC + (A \times \frac{M}{N}) = CA + (\frac{M}{N} \times A) = (C + \frac{M}{N}) \times A = BA$. Nun verbinde man das Erste und Letzte; so sieht man, daß $AB = BA$, und B, oder der zweyte Factor, ist hier eine unreine Zahl, z. E. $(3 \times 2\frac{2}{5} = 2\frac{2}{5} \times 3.)$ $(\frac{3}{4} \times 2\frac{2}{5} = 2\frac{2}{5} \times \frac{3}{4})$ $(2\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4})$.

§. 45.

§ 45.

Weil die Einsicht in die eben itzt bewiesene Wahrheit, vielleicht manchem einige Schwierigkeit macht; so will ich auch ihre Wichtigkeit zeigen. Es geschicht oft, daß man im Rechnen ein aus vielen Factoren entstandnes Product wiederum dividiren soll, durch ein Product, welches gleichfalls aus vielen Factoren entstanden ist. Nun werde ich gleich beweisen, daß wenn man eine Zahl durch etwas multiplicirt, welches entweder vorher oder nachher durch dasselbe sollte dividirt werden, jene Zahl unverändert bleibe. Um sich nun oftmals unnöthige Mühe zu erspahren, muß man die Gleichheit oder Ungleichheit der Producte, wodurch man eine Zahl multipliciren und dividiren soll, aus dem ersten Anblicke kennen. Und diese Erkenntniß wird durch das Erwiesene sehr befördert, welches ich deswegen wiederholen will.

Wenn also ein Product aus vielen Factoren besteht, z. E. $A \times B \times (C \times D) \times (E \times G)$, davon einige schon selbst Producte sind; so wird die Operation des Multiplicirens, ohne Veränderung des letzten Resultats verändert, nicht nur durch jede beliebige Versetzung der Factoren, sondern auch durch jede beliebige Verbindung zweyer, dreyer, oder mehrerer Factoren in ein einziges Product, wodurch hernach als durch einen einzigen Factor multiplicirt wird; oder durch Trennung und Versetzung derjenigen Factoren, die vorher in

Verbindung, als ein Product geschrieben waren. Alles dieses erhellet aus den schon bewiesenen Hauptsätzen in dem vorhergehenden Paragraphen. Z. E. (AB)(CD)E=(AEC)x(BD). Denn alle diese und jede erdenkliche Veränderung kömmt, wenn man bedenkt, daß zwey Factoren sich versetzen lassen, und daß es gleichgültig sey, ein Product zweyer Factoren durch den dritten zu multipliciren, oder erst durch Multiplication eines der vorigen Factoren durch diesen dritten, ein Product zu machen, welches man hernach durch den zweyten vorigen Factor multiplicirt.

§. 46.

Die Universal-Multiplication, worinnen man aber nur aufgeweckte Köpfe, oder künftige Gelehrte zu üben pflegt, ist, wenn man eine algebraisch ausgedrückte Zahl (§. 19.), besonders wenn sie sowohl negative als positive Theile hat, (§. 19) durch eine andere solche algebraische Zahl multiplicirt, z. E. (A—B+C)x(D+E—G), oder (9—4+6)x3+2—4. Von solcher Universal-Multiplication ist es eben sowohl wahr, als von der andern, **daß man jeden Theil des einen Factors**, er mag positiv oder negativ seyn, **durch jeden Theil des andern Factors** multipliciren müsse, um das Product zu bekommen. Ferner ist es klar, daß, wenn man etwas **Positives durch Positives** zu multipliciren hat, das Product positiv werde, z. E. (+4)x(+3) muß +12 seyn. **Ist aber ein Factor positiv, der andre negativ;**

tiv; so muß das Product negativ werden. Denn, wenn der Hauptfactor negativ, und der Nebenfactor positiv ist; so soll man ja eine Anzahl oder ein Theil der negativen Grösse, so wie sie ist, und also negativ, dem andern positiven Factor gemäß setzen, z. E. Wenn mir 5 dreymal mangeln; so mangeln mir ja 15; also muß (– 5)x(+3) seyn (—15). Und überhaupt (—A)x(+B) muß seyn =(—AB). Ist aber der Hauptfactor positiv, und der andere negativ; so ist es ein Zeichen, daß der negative Nebenfactor, ein Theil eines solchen algebraischen Factors sey, worinnen ein positiver Theil um so viel zu groß ist, als dieser negative Theil anzeigt, z. E. Wenn (9—5) ein Factor ist; so ist 9 um so viel zu groß, als 5 anzeigt. Soll man nun etwas Positives, z. E. (+8) durch (9—5) multipliciren; so muß man ja setzen erstlich (+8) x(+9), das ist 72. Aber diese 72, sind deswegen um (8x5) zu groß, weil der zweyte Factor ja nicht 9, sondern 4 ist. Also, wenn man zweytens dahin kömmt (+8) durch (—5) zu multipliciren; so muß man gewiß etwas bekommen, welches von der Zahl 72 soll abgezogen werden, nemlich (—40). Also ist (+8)x(—5)=(—40). Und überhaupt (+A)x(—B) ist eben sowohl = (—AB), als es (—A)x(+B) seyn würde. Nun ist noch übrig, zu zeigen, was das Product sey, wenn beyde Factoren negativ sind, z. E. Wenn (—A) durch (—B) oder (—5) durch (—3) multiplicirt werden soll. Man betrachte (—B) als den Nebenfactor. Er ist gewiß ein Theil eines solchen Factors, worinnen ein positiver Theil um

so viel zu groß ist, als B anzeigt, z. E. (—5) stehe in dem Factor (9—5). Man stelle sich vor, daß durch diesen Factor der Hauptfactor (8—3) multiplicirt werden soll: so setzt man ja Anfangs (+8 x 9), ferner (—(3 x 9)); drittens (—8 x 5). Nun komme ich dahin, daß ich (—3) durch (—5) multipliciren soll. Weil 9 um so viel zu groß war, als 5 anzeigt; so habe ich in dem zweyten Producte, oder in (— (3x9)) die negative Grösse (—3) ich habe sie, sage ich, 5 mal zu viel gesetzt, d. i. es sollten (—15) nicht gesetzt werden, die doch gesetzt sind. Bekomme ich nun nebst diesen (—15), ich will sagen nebst denen negativen 15, noch 15 positive oder (+15); so ist der Fehler ersetzt. Er muß aber ersetzt werden, wo mein Product richtig seyn soll. Also muß (—3) multiplicirt, durch (—5), gewiß (+15) seyn. Und weil die Umstände allemal, wenn man negative Zahlen durch einander multipliciren soll, eben so beschaffen sind; so muß (—Y), multiplicirt durch (—Z) allemal (+YZ) seyn, z. E. (A—B+C) x (D+E—G) = +AD —BD+CD+AE—BE+CE—AG+BG—CG. Oder (9—4+6) x (3+2—4) = +9x3—4x3+6x3+9x2—4x2+6x2—9x4+4x4—6x4 = 11.

Viertes Hauptstück.

Von der Division und den Brüchen.

§ 47.

Dividiren ist, den zweyten Factor suchen, welcher, multiplicirt durch einen gegebnen Factor, ein gegebenes Product hervorbringt: z. E. Wenn man suchen soll, welche Zahl, multiplicirt durch 3, die Zahl 12 hervorbringt; so dividirt man 12 durch 3.

Wenn dividirt werden soll, so nennt man das gegebene Product, das **Dividendum**; den gegebenen Factor, nennt man den **Divisor**; den Factor, der gesucht werden soll, nennt man den **Quotienten**.

Wenn dividirt werden soll; so schreibt man das Product, oder das Dividendum, als einen Zähler; und den gegebenen Factor als einen Nenner, und also beydes als einen Bruch. Oder man schreibt das Product und den Divisor mit zwischengesetzten zweyen Puncten neben einander. z. E. $\frac{A}{B}$, oder A:B. So auch $\frac{12}{3}$, oder 12:3. Man lese: A dividirt durch B, oder 12 dividirt durch 3. Der Strich oder die zwey Puncte, sind also das **Divisionszeichen**. Und zwey Zahlen, die durch das Divisionszeichen verknüpft sind, bedeuten ihren noch nicht gefundenen Quotienten. z. E. $\frac{15}{3}$, oder (15:3) bedeutet nichts anders, als

als 5; es ist ein Ausdruck dieses Quotienten; es ist der Quotient selbst; daher darf man $\frac{A}{B}$ und Q allemal verwechseln, wenn man weiß, daß A, dividirt durch B, den Quotienten Q geben würde.

§. 48.

Aus diesem Begriffe von der Division erhellet, daß, wenn man das Dividendum durch den Quotienten dividirt, der alte Divisor der neue Quotient werde. z. E. $\frac{12}{4}=3$. Also $\frac{12}{3}=4$.

Nun ist es ein Grundsatz, daß, wenn man zwey gleiche Dinge, durch gleiches dividirt, gleiches herauskomme; und daß, wenn man eine Zahl zugleich multipliciren, und durch dieselbe Zahl, wodurch man multiplicirt hat, auch dividiren soll, die zugleich zu multiplicirende, und zugleich zu dividirende, Zahl, dieselbe unverändert bleibe. Ich sage als einen Grundsatz; wenn $A=X$; so ist $\frac{A}{Y}=\frac{X}{Y}$. Ich sage ferner als einen Grundsatz, daß $\frac{A}{Y}\times Y=A$. Diese beyden Grundsätze will ich durch zwey Exempel erläutern. 24 ist 2 Dutzend. Man dividire beydes durch 6; man wird in beyden Fällen 4 bekommen. Man multiplicire 12 durch 2; man dividire das Product wieder durch 2; es wird 12 wieder hervorkommen. Eine solche gleiche Multiplication und Division heben einander auf. Daher verrichtet man die Multiplication durch C, an der Zahl (B:C), wenn man B schreibt. z. E. Anstatt

statt $(8:2)\times 2$, schreibe man 8. Eben darum verrichtet man die Division durch C, an $A\times C$, wenn man A schreibt. z. E. $(6\times 4):4=6$.

§. 49.

Wenn ein Product, welches dividirt werden soll, aus Theilen besteht; so darf man die Sammlung aller Theile anstatt des Ganzen setzen. z. E. Wenn $A=b+c+d$; so ist $\frac{A}{Y}=\frac{b+c+d}{Y}$. z. E. $\frac{12}{4}=\frac{5+4+3}{4}$. Dieses hat keine Schwierigkeit.

Etwas mehr Schwierigkeit macht es, wenn man einsehen soll, daß $\frac{b+c+d}{B}=\frac{b}{B}+\frac{c}{B}+\frac{d}{B}$. Aber man nenne $\frac{b+c+d}{B}$ mit dem Namen Q. Man nenne $\frac{b}{B}$ mit dem Namen R; man nenne $\frac{c}{B}$ mit dem Namen S; man nenne $\frac{d}{B}$ mit T. So muß BQ seyn $=b+c+d$. Ferner BR muß seyn $=b$. Und BS muß seyn $=c$. Endlich BT muß seyn $=d$. Also $BR+BS+BT$ muß seyn $=b+c+d$. Da nun BQ auch $b+c+d$; so ist $BQ=BR+BS+BT$. Das ist $BQ=B\times(R+S+T)$. Oder $Q=R+S+T$. Oder $\frac{b+c+d}{B}=\frac{b}{B}+\frac{c}{B}+\frac{d}{B}$. z. E. $\frac{24}{6}=\frac{12+6+6}{6}=\frac{12}{6}+\frac{6}{6}+\frac{6}{6}$.

§. 50.

Die Division wird nicht vollständig erklärt, wenn man nicht vorher etwas mehr von Brüchen sagt, als gesagt ist.

Aus

Aus dem Begriffe also, welchen wir uns (§ 5 und 6) von einem Bruche gemacht haben, ist klar, daß, wenn **Nenner und Zähler gleich sind**, der Bruch eben so viel sey, als eine Principal-Einheit. z. E. $\frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \frac{99}{99} = \frac{1000}{1000} = 1$.

Ist der Zähler kleiner als der Nenner; so ist der Bruch weniger, als Eins. z. E. $\frac{3}{4}$ ist noch nicht Eins, es fehlt $\frac{1}{4}$. So auch $\frac{5}{8}$ ist noch nicht Eins, es fehlen $\frac{3}{8}$.

Ist der Zähler grösser als der Nenner; so ist der Bruch mehr, als Eins. z. E. $\frac{6}{4} = \frac{4}{4} + \frac{2}{4} = 1\frac{2}{4}$. So auch $\frac{105}{101} = \frac{101}{101} + \frac{4}{101} = 1 + \frac{4}{101}$.

Wenn Brüche gleiche Nenner haben; so bedeuten ihre Zähler lauter gleichbenahmte Zahlen, lauter Zahlen von gleicher Zahlwürde. **Man addirt, man subtrahirt die Zähler gleichbenahmter Brüche**, wie Integralzahlen, wenn man nur in der Summe und Differenz, den Nenner beybehält, um anzuzeigen, von welcherley Einheiten die Rede sey. Und alsdann hat man die Summe und Differenz solcher Brüche gemacht. z. E. $(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}) = \frac{11}{4}$. So auch $(\frac{9}{11} - \frac{5}{11}) = \frac{4}{11}$.

Daher ist klar, **daß der Bruch multiplicirt werde, wenn man den Zähler multiplicirt, und den Nenner beybehält.** z. E. $\frac{2}{3} \times 4$, oder $4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}, = \frac{2+2+2+2}{3} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$.

Wenn man also den Zähler, oder den Bruch, **durch den Nenner multiplicirt**; so wird jede Einheit des Zählers so groß, als der Nenner, folglich entstehen aus dem Bruche alsdann, so viele

Prin-

Principal-Einheiten, als der Zähler Einheiten hatte; das ist, das Resultat wird dem Zähler gleich. z. E. $\frac{4}{5} \times 5$, oder $5 \times \frac{4}{5} = \frac{5+5+5+5+5}{5} = \frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5}+\frac{5}{5} = (1+1+1+1+1) = 5$.

Nun erinnere man sich, daß ein Product und Divisor, mit dem Divisionszeichen geschrieben, dem Quotienten gleich gelte, z. E. $(12:4) = 3$. Man nenne das Product A; den Divisor nenne man B, der Quotient heisse Q. So ist ja bekannt, daß $BQ = A$. Wenn nun A ein Zähler, B ein Nenner ist, und der Bruch, welcher, wie $\frac{A}{B}$ aussieht, F genannt wird; so ist auch bekannt, daß $FB = A$. Da nun auch $QB = A$: so muß auch F und Q einander gleich seyn, weil sie beyderseits, multiplicirt durch B, gleiche Producte geben. Der Bruch F, ist also gleich dem Quotienten Q, worinnen das Product dem Zähler des Bruches, und der Divisor dem Nenner des Bruches gleicht. Oder kürzer: **Der Innhalt eines Bruchs ist gleich einem Quotienten, der mit dem Divisionszeichen, solche Zahlen, als der Bruch hat.** Z. E. Der Quotient $(16:4)$ ist gleich dem Bruche $\frac{16}{4}$. So auch $(3:5)$ ist gleich dem Bruche $\frac{3}{5}$. Daher man auch die Freyheit hat, einen Bruch als einen Quotienten, und einen Quotienten als einen Bruch zu schreiben. **Und eben darum** gilt alles, was von Quotienten bewiesen wird, auch von Brüchen, **und was von Brüchen bewiesen wird, gilt auch von Quotienten.** Nur muß man behalten, daß, wenn man einen Bruch

als einen Quotienten betrachtet, der Zähler das Product; der Nenner der Divisor sey. Daher schreibt man auch, wenn eine Zahl zu dividiren, und der Quotient wegen Beschaffenheit des zu dividirenden Products und des Divisors keine reine Integralzahl ist, die kommende Integralzahl, und alsdann den übrigen Theil des Quotienten, der ein Bruch ist, neben einander, z. E. $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$, warum, weil $\frac{11}{3} = (\frac{9}{3} + \frac{2}{3}) = 3\frac{2}{3}$.

§ 51.

Wenn zwey zu dividirende Producte gleich, die Divisoren aber ungleich sind; so ist derjenige Quotient grösser, dessen Divisor der kleinste ist, z. E. Weil Sechs kleiner ist als Acht; so ist $\frac{24}{6}$ grösser als $\frac{24}{8}$

Wenn Eins der Divisor ist; so ist das Product der Quotient, z. E. $\frac{24}{1} = 24$.

Man bekömmt einerley Resultat, man mag das Product, durch eine Zahl Z dividiren; oder man mag irgend einen der Factoren, erst durch Z dividiren, und alsdann das Product machen. Ich sage $\frac{AB}{C} = (\frac{A}{C} \times B) = (A \times \frac{B}{C})$.
Dieses einzusehen, braucht man nichts, als sich zu erinnern, daß, wenn ein Bruch der Factor ist, der Zähler multiplicirt werde, z. E. $\frac{12 \times 18}{6} = \frac{12}{6} \times 18 = 12 \times \frac{18}{6}$.

Man multiplicire an dem Bruche $\frac{A}{B}$ den Zähler durch C, oder man dividire den Nenner durch C. In beyden Fällen kömmt einerley Resultat.

Resultat. Ich sage $\frac{AC}{B} = \frac{A}{B:C}$. Denn der letzte Bruch heisse Q. Es ist $(B:C) \times Q = A$. Also, wenn man das erste und zweyte gleiche Glied, durch C multiplicirt, so findet man, daß $B \times Q = AC$. Dividiret man hier und dort ferner durch B; so findet man, daß Q oder $\frac{A}{B:C} = \frac{AC}{B}$, welches ich erweisen wollte, z. E. $\frac{8}{12:4} = \frac{8 \times 4}{12}$.

Man dividire an dem Bruche $\frac{A}{B}$ den Zähler durch C, oder man multiplicire den Nenner durch C. Beyde Resultate sind gleich. Ich sage $\frac{A:C}{B}$ ist $= \frac{A}{B \times C}$. Deñ der letzte Bruch heisse Q. So ist $QBC = A$. Und $QB = A:C$. Und $Q = \frac{A:C}{B}$. z. E. $\frac{12:3}{8} = \frac{12}{8 \times 3}$. Daher multiplicirt man einen Bruch eben so gut, durch die Division des Nenners, als durch die Multiplication des Zählers. z. E. $\frac{3}{12} \times 4 = \frac{3}{12:4}$.

Aus dem Gesagten erhellet, daß wenn man zugleich Zähler und Nenner durch eben dieselbe Zahl multiplicirt, man den Bruch unverändert so gelassen habe, als er war. Denn durch die Multiplication des Nenners, ist der Zähler dividirt, und ist also an dem Zähler eine gleiche Multiplication und gleiche Division geschehen, welche einander aufhebt. z. E. $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4}$.

Eben so gewiß ist es, daß der Bruch unverändert beybehalten werde, wenn man zugleich

Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt. Denn durch die Division des Nenners, ist am Zähler eine Multiplication geschehen, wodurch die gleiche Division aufgehoben wird. z. E. $\frac{12}{6} = \frac{12:2}{6:2}$.

Wenn Divisor so wohl, als Quotient, ein jeder nicht über 9 ist; so hat man den Quotienten, vermöge des Einmal Eins, im Gedächtnisse. z. E. Wer weiß nicht, daß $\frac{15}{5} = 3$, daß $\frac{67}{8} = 8\frac{3}{8}$. Daher läßt sich überhaupt von der Division, uud der daraus folgenden Bruchrechnung handeln, ehe von der Ausübung der Division grosser Zahlen gehandelt ist. Und dieses finde ich am rathsamsten.

§ 52.

Das Bewiesene öffnet uns das Verständniß, wie wir mit Brüchen und unreinen Zahlen umgehen müssen, wenn wir die vier Species der Rechenkunst, das ist, die Addition, Subtraction, Multiplication, und Division anwenden sollen.

Wir wissen zwar schon, wie wir Brüche zu einander addiren, und von einander subtrahiren müssen, wenn sie gleiche Nenner haben. Aber wie, wenn die Nenner ungleich sind, als in $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{8}$? Hier ist zu wissen, daß man anstatt zweyer Brüche, allemal zwey gleichgültige zu finden weiß, die gleiche Nenner haben. Man multiplicire nemlich den Nenner und den Zähler des Bruches A, durch den Nenner des Bruches B. Man multiplicire auch den Zähler und Nenner

ner des Bruches B, durch den Nenner des Bruches A; so kommen zwey Brüche, die den vorigen gleichgültig sind, und doch gleiche Nenner haben. Es seyn die Brüche $\frac{7}{8}$ und $\frac{3}{5}$. $\frac{7}{8} = \frac{7 \times 5}{8 \times 5} = \frac{35}{40}$. Und $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 8}{5 \times 8} = \frac{24}{40}$. Nun haben $\frac{35}{40}$ und $\frac{24}{40}$ gleiche Nenner. Jener ist immer $\frac{7}{8}$, dieser ist immer $\frac{3}{5}$.

Soll man mehr als zwey Brüche unter gleichen Nenner bringen; so multiplicire man Zähler und Nenner jedes Bruches durch das Product der übrigen Nenner, z. E. $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{5}$; sind als $\frac{1 \times (3 \times 5)}{2 \times (3 \times 5)}$ und $\frac{2 \times (2 \times 5)}{3 \times (2 \times 5)}$ und $\frac{3 \times (2 \times 3)}{5 \times (2 \times 3)}$, oder als $\frac{15}{30}$ und $\frac{20}{30}$ und $\frac{18}{30}$ unter einen Nenner gebracht.

Da aber der Inhalt des Bruchs auch unverändert bleibt, wenn man Zähler und Nenner durch gleiche Zahl dividirt; so bringt man Brüche oft mit grösserer Bequemlichkeit unter gleichen Nenner, wenn man gewahr wird, daß sie gleiche Nenner hätten, wenn man an einem der Brüche diese doppelte Division anstellete, z. E. $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{12}$, sind dadurch schon unter einen Nenner gebracht, wenn man anstatt des letzten Bruches nimmt $\frac{4:4}{12:4}$ oder $\frac{1}{3}$.

Und zuweilen läßt sich die ähnliche Benennung dadurch verrichten, daß man nur den Nenner und Zähler des einen Bruchs, durch eine gewisse Zahl multiplicirt, z. E. Man bringt $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{8}$ schon unter einen Nenner, wenn man an statt $\frac{3}{4}$ setzet $\frac{3 \times 2}{4 \times 2}$, das

ist $\frac{6}{8}$. Also weiß man, allerley Brüche zu addiren und zu subtrahiren. Man bringt sie nemlich unter gleiche Nenner, wenn sie dieselben nicht vorher schon haben, und verfährt alsdann, wie oben (§. 50.) ist gelehret worden, z. E. $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} = \frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8}$. Und $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{1}{8}$.

Ist ein Bruch zu einer Integralzahl zu addiren; so schreibt man ihn nur darneben, z. E. $5 + \frac{3}{8} = 5\frac{3}{8}$. Ist ein Bruch zu einer unreinen Zahl zu addiren; so addirt man die Brüche, und die Summe addirt man zu der Integralzahl, z. E. $5\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 5 + (\frac{3}{5} + \frac{2}{5}) = 5 + \frac{5}{5} = 5 + 1 = 6$. So auch $4\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = 4 + (\frac{2}{3} + \frac{3}{4}) = 4 + \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = 4 + (\frac{8}{12} + \frac{9}{12})$ $= 4 + \frac{17}{12} = 4 + \frac{12}{12} + \frac{5}{12} = 4 + 1 + \frac{5}{12} = 5 + \frac{5}{12}$.

Ist eine unreine Integralzahl zu einer andern zu addiren; so addirt man Bruch und Bruch, Integralzahl und Integralzahl, und beyde Summen zusammen. z. E. $5\frac{2}{7} + 2\frac{3}{7} = (5 + 2) + (\frac{2}{7} + \frac{3}{7}) = 7\frac{5}{7}$.

Ist von einer Integralzahl ein Bruch zu subtrahiren; so verwandelt man eine Einheit der Integralzahl in einen dem Bruche gleichbenahmten Bruch; subtrahirt alsdann den Bruch von dem Bruche, und schreibt den gebrochnen Rest zu dem Integralreste. z. E. $4 - \frac{2}{3} = (3 + \frac{3}{3}) - \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Ist von einer unreinen Integralzahl eine reine zu subtrahiren; so subtrahirt man die Integralzahlen und schreibt zum Reste den vorigen Bruch als einen Nebenrest. z. E. $5\frac{1}{3} - 3 = (5 - 3) + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Ist

Ist von einer unreinen Integralzahl ein Bruch zu subtrahiren; so bringt man die Brüche unter gleiche Nenner. Findet man alsdenn, daß der Bruch in der Hauptsumme, der kleinere sey; so macht man noch eine Einheit der Hauptsumme zum Bruche, und addirt denselben zu demjenigen, der zu klein war. Alsdann subtrahirt man Bruch vom Bruche, und schreibt den gebrochnen Rest zu dem Integralreste. z. E. $5\frac{2}{3} - \frac{4}{5} = 5\frac{10}{15} - \frac{12}{15} = (4 + \frac{15}{15} + \frac{10}{15}) - \frac{12}{15} = 4\frac{25}{15} - \frac{12}{15} = 4\frac{13}{15}$.

Ist von einer unreinen Inregralzahl eine andre zu subtrahiren; so thut man dasselbe als zuvor. Z. E. $9\frac{3}{8} - 5\frac{1}{4} = 9\frac{3}{8} - 5\frac{2}{8} = (9 - 5) + (\frac{3}{8} - \frac{2}{8}) = 4\frac{1}{8}$.

§ 53.

Es ist aber zu merken, daß man am Ende seiner Rechnung niemals einen Bruch, welcher grösser als eine Einheit ist, so unverändert stehen lässet, sondern man sucht die **Menge der Integral-Einheiten**, oder die Integralzahl, welche darinnen verborgen liegt. z. E. Zuletzt, schreibt man nicht mehr $\frac{12}{4}$, sondern 3; nicht mehr $\frac{16}{5}$, sondern $3\frac{1}{5}$. Man findet aber die Integralzahl, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt.

Wenn der Nenner grösser ist, als der Zähler; so lassen sich keine Integralzahlen aus dem Quotienten oder Bruche heraus ziehen; sondern die Division ist dadurch geschehen, daß man den Quotienten, als einen Quotienten, oder als einen Bruch betrachtet.

Eben so wenig läßt man einen Bruch am Ende der Rechnung unverändert stehen, wenn sich sein Ausdruck, vermittelst einer gleichen Division des Zählers und Nenners verkleinern läßt. z. E. Es bleibt nicht $\frac{4}{8}$, sondern $\frac{1}{2}$; nicht $\frac{9}{12}$, sondern $\frac{3}{4}$. Einige Hülfsmittel dieser Verkleinerung will ich unten zeigen.

Will man Einheiten, welche kleiner sind, als die Principal-Einheit, wie einen Bruch derselben vorstellen; so ist gewiß der Nenner kein andrer, als diejenige Zahl, welche anzeigt, wie viel solcher kleinern Einheiten auf die Principal-Einheit gehen. z. E. Weil 24 Groschen einen Thaler macht; so sind 16 Groschen nichts anders, als $\frac{16}{24}$ Thl., oder als $\frac{2}{3}$ Thl.

Will man einen Bruch der Principal-Einheit vorstellen als eine Zahl kleinerer Einheiten; so ist die Zahl wohl zu merken, welche anzeigt, wie viel solcher kleinern Einheiten auf die Principal-Einheit gehen. Denn gleichwie alsdann jede Principal-Einheit, so viel kleinere Einheiten hat, als diese Zahl anzeigt; so hat auch jeder Theil der Principal-Einheit, so viele gleichbenahmte Theile der kleinern Einheiten. Folglich muß man in diesem Falle, den Bruch durch diese Zahl multipliciren, z. E. $\frac{3}{4}$ Schock ist so viel als $\frac{3}{4} \times 60$ Stück, das ist, als $\frac{180}{4}$ Stück, oder als 45 Stück.

§ 54.

Jeder Bruch ist eine Anzahl kleinerer Einheiten. Jede Integralzahl ist eine Summe von Brüchen. Denn viele Theile machen ein Ganzes.

Eine

Eine jede Summe von Brüchen duldet die Gestalt eines Bruchs. Also, wenn es die Absicht erfordert, läßt sich jede Integralzahl zu der **Form eines Bruches einrichten.** Man darf nur durch gleiche Zahl multipliciren, und durch dieselbe Zahl, vermittelst des Divisionszeichens, dividiren, z. E. $5 = \frac{5 \times 6}{6} = \frac{30}{6}$. So auch $5\frac{2}{3} = \frac{5\frac{2}{3} \times 3}{3} = \frac{15\frac{6}{3}}{3} = \frac{17}{3}$. Und wenn man auf solche Weise den Nenner des Bruches einer unreinen Integralzahl anwendet, um die ganze Zahl in die Form eines Bruches einzurichten; so will ich dieses zum Unterschiede anderer Einrichtungen, welche sich bey derselben Zahl gebrauchen liessen, **die erforderliche Einrichtung** nennen.

Wir wissen schon, **wie ein Bruch durch eine Integralzahl multipliciret werde**, nemlich durch Multiplication des Zählers, oder Division des Nenners. (§. 50. und 51.)

Ist Bruch durch Bruch zu multipliciren; so multiplicire man Zähler durch Zähler, Nenner durch Nenner, und schreibe beyde Producte als einen Bruch. Denn eigentlich sollte der Zähler des einen Bruches, durch den Bruch, welcher der andre Factor ist, multiplicirt werden, z. E. Wenn die Brüche $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$ sind; so ist $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C : D}{B}$. Da nun aber die Division eines Zählers, die Multiplication eines Nenners ist; so ist $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{A \times C : D}{B} = \frac{A \times C}{B \times D}$. Z. E. $(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}) = \frac{2 \times 1}{3 \times 2}$

$\frac{2 \times 1}{3 \times 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Aber, wenn es uns bequemer fällt, dürfen wir auch den Zähler des einen Factors durch den Nenner des andern, und den Nenner jenes, durch den Zähler dieses Factors dividiren, und die Resultate als einen Bruch schreiben. Auch alsdann haben wir multiplicirt. Denn wir multipliciren ja $\frac{A}{B}$ durch $\frac{C}{D}$, wenn wir $\frac{A \times C}{B \times D}$ machen. Aber, weil Multiplication des Zählers, Division des Nenners ist; so dürfen wir an statt des obigen schreiben: $\frac{A}{B \times D : C}$. Und weil Multiplication des Nenners, Division des Zählers ist; so dürfen wir ferner schreiben $\frac{A:D}{B:C}$. Z. E. $\frac{4}{9} \times \frac{3}{4} = \frac{4:4}{9:3} = \frac{1}{3}$

Ist der eine Factor eine unreine Integralzahl, der andere ein Bruch; so hat jener zwey Theile, welche beyderseits durch den Bruch zu multipliciren sind, und zwar auf solche Art, die wir schon kennen. Z. E. $5\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = (5 \times \frac{2}{3}) + (\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}) = (\frac{10}{3} + \frac{6}{12}) = (3\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = 3 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = 3 + (\frac{2}{6} + \frac{3}{6}) = 3\frac{5}{6}$. Man hat es zuweilen bequemer, wenn man den einen Factor auf erforderliche Art einrichtet, und als einen Bruch durch den Bruch multipliciret. z. E. $5\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{23}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{46}{12} = 3\frac{10}{12} = 3\frac{5}{6}$.

Ist der eine Factor eine reine, der andre eine unreine Integralzahl; so soll jener durch die zwey Theile dieses, auf uns bekannte Art multipliciret werden, z. E. $5 \times 3\frac{2}{3} = 5 \times 3 + 5 \times \frac{2}{3} = 15 + \frac{10}{3} = 15 + (3\frac{1}{3}) = 18\frac{1}{3}$.

Sind

Sind beyde Factoren unreine Integralzahlen; so wird man die Multiplication am bequemsten verrichten, wenn man beyde Zahlen auf gehörige Art einrichtet, und als Brüche multipliciret, z. E. $2\frac{1}{3} \times 4\frac{2}{5} = \frac{7}{3} \times \frac{22}{5} = \frac{154}{15} = 10\frac{4}{15}$.

§ 55.

Es ist ausser Zweifel, **daß der Bruch dividirt werde**, wenn man den Zähler mit Beybehaltung des Nenners dividirt. Denn alsdann kömmt, als der Quotient, ein Bruch, welcher, wenn er durch den vorigen Divisor multiplicirt wird, deswegen, weil gleiche Multiplication und Division sich einander aufheben, derselbe, zuerst zu dividirende, Bruch wird. Und dieses ist ja die Natur des rechten Quotienten, daß er, multiplicirt durch den Divisor, das Dividendum wieder herstelle.

Ist also ein Bruch durch eine Integralzahl zu dividiren; so dividire man den Zähler mit Beybehaltung des Nenners, z. E. $(\frac{4}{5}:2) = \frac{4:2}{5} = \frac{2}{5}$. Aber weil Division des Zählers, eine Multiplication des Nenners ist; so dividirt man mehrentheils auf bequeme Art den Bruch, wenn man den Nenner multiplicirt, z. E. $(\frac{3}{4}:5) = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$.

Ist eine Integralzahl durch einen Bruch zu dividiren; so heisse die Integralzahl A; der Bruch, welcher der Divisor ist, heisse $\frac{B}{C}$, und der Quotient, welcher durch diese Division kömmt, heisse Q. $Q \times \frac{B}{C}$ muß A seyn. Man multipli-

cire beydes durch C; so sieht man, daß $QB = AC$. Dieses dividire man beyderseits durch B; so sieht man, daß $Q = \frac{AC}{B}$, und daß man also um den Quotienten, von einer Integralzahl, welche durch einen Bruch dividirt werden soll, zu bekommen, die Integralzahl durch den Nenner multipliciren, und das Product durch den Zähler dividiren muß, z. E. $4 : \frac{2}{3} = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Ist Bruch durch Bruch zu dividiren; so soll eigentlich der Zähler desjenigen Bruchs, welcher das Dividendum ist, durch den andern Bruch, welcher der Divisor ist, dividirt werden. Nun sey das Dividendum $= \frac{9}{20}$, der Divisor sey $= \frac{3}{5}$; so sollte der Quotient seyn $\frac{9 : (3 : 5)}{20}$. Hier betrachte man den neuen Zähler. Er ist ein Bruch, dessen Nenner dividirt ist. Er ist $\frac{9}{3 : 5}$. Die Division am Nenner ist eine Multiplication am Zähler, welches uns schon bekannt ist. Also ist $\frac{9}{3 : 5} = \frac{9 \times 5}{3}$. Also darf man anstatt jenes neuen Zählers setzen, $(9 \times 5) : 3$. Und der Quotient, den wir suchen, ist $\frac{(9 \times 5) : 3}{20}$. Hier betrachte man abermals den Zähler. Er ist durch etwas dividirt. Die Division am Zähler ist eine Multiplication am Nenner. Also ist jener Bruch, oder $\frac{(9 \times 5) : 3}{20} = \frac{9 \times 5}{20 \times 3}$. Hier sieht man, daß die Division des Bruches $\frac{9}{20}$ durch $\frac{3}{5}$, dadurch verrichtet sey, daß der Zähler des ersten durch den Nenner des zweyten Bruches, und der Nenner

ner des ersten durch den Zähler des zweyten Bruches multipliciret, und beyde Producte als ein Bruch geschrieben sind. Und weil wir hier gar nicht auf die Grösse der Zahlen gesehen haben; so ist dieses eine allgemeine Regel, daß man in der Division des Bruchs durch Bruch, den Divisor umkehre, und alsdann multiplicire. Also $\frac{9}{20}:\frac{3}{5} = \frac{9}{20}\times\frac{5}{3} = \frac{9\times5}{20\times3} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$. Aber da die Multiplication am Zähler, eine Division am Nenner ist, und die Multiplication am Nenner, eine Division am Zähler ist; so dürfte man, um den Bruch $\frac{9}{20}$ durch $\frac{3}{5}$ zu dividiren, nur den Zähler des ersten Bruchs, durch den Zähler des zweyten Bruchs, und den Nenner des ersten Bruchs, durch den Nenner des zweyten Bruchs dividiren, und beyde Quotienten als einen Bruch schreiben; so wäre die Absicht oft auf eine bequemere Art erfüllt, z. E. $\frac{9}{20}:\frac{3}{5} = \frac{9:3}{20:5} = \frac{3}{4}$.

Ist eine unreine Integralzahl durch einen Bruch zu dividiren; so hat das Dividendum zwey Theile, eine Integralzahl und einen Bruch. Jeden Theil wissen wir schon durch einen Bruch zu dividiren, und also den ganzen Quotienten zu machen. z. E. $(2\frac{3}{4}:\frac{1}{2}) = (2:\frac{1}{2}) + (\frac{3}{4}:\frac{1}{2}) = \frac{4}{1} + (\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}) = \frac{4}{1} + \frac{6}{4} = 4 + 1\frac{2}{4} = 4 + 1\frac{1}{2} = 5\frac{1}{2}$. Doch kömmt man eben so leicht zum Zwecke, wenn man die unreine Integralzahl gehörig einrichtet, und alsdann mit Brüchen dividirt. z. E. $2\frac{3}{4}:\frac{1}{2} = \frac{11}{4}:\frac{1}{2}: = (\frac{11}{4}\times\frac{2}{1}) = \frac{22}{4} = 5\frac{1}{2}$.

Ist ein Bruch durch eine unreine Integralzahl zu dividiren; oder ist überhaupt, bey welchen

welchen Umständen es auch sey, der Divisor eine unreine Integralzahl; so richte man diesen Divisor anf gehörige Art ein, und dividire alsdann, durch den Bruch, welcher diesem Divisor gleicht. Z. E. $(4:1\frac{2}{3}) = (4:\frac{5}{3}) = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$. So auch $(\frac{2}{3}:2\frac{1}{2}) = (\frac{2}{3}:\frac{5}{2}) = (\frac{2}{3} \times \frac{2}{5}) = \frac{4}{15}$. Auf eben diese Weise ist $(2\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}) = (\frac{5}{2}:\frac{4}{3}) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{5 \times 3}{2 \times 4} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

§ 56.

Ich sage, daß alsdann die **Division mit grossen Zahlen** geschehe, wenn entweder der Quotient, oder der Divisor, oder auch ein jeder, über 9 ist, z. E. $\frac{210}{9}$, $\frac{450}{201}$, $\frac{406}{13}$.

Bey solchen Divisionen ist nun vors erste zu merken, daß wenn man **Zahlen, welche sich mit Nullen schliessen, durch eine Rang-Einheit dividiren soll**, welche sich gleichfalls mit Nullen schließt, daß man, sage ich, alsdann dividire, durch blosse Weglassung so vieler Nullen am Dividendo, als die Rang-Einheit hat, z. E. $\frac{4560}{10} = 456$, so auch $\frac{98700}{100} = 987$, so auch $\frac{1234000}{1000} = 1234$ u. s. w. Denn eine Zahl, die sich mit Nullen schließt, ist anzusehen als ein Product, davon einer der Factoren eine Rang-Einheit ist, z. E. $1234000 = 1234 \times 1000$. Es ist also kein Wunder, daß $\frac{1234 \times 100}{1000}$, keinen andern Quotienten giebt, als 1234.

Ferner, wenn sowohl das Product, als der Divisor, das ist, sowohl der Zähler als der Nenner, sich mit einigen Nullen schließt, und man hier und dort gleichviel Nullen wegläßt; so ist klar, daß hier und dort mit einer gleichen Rang-Einheit dividirt sey, und also der Quotient oder der Inhalt des Bruchs unverändert bleibe, z. E. $\frac{24600}{1900} = \frac{246}{19}$. Hiedurch verkürzt man sich oftmals die Mühe des Dividirens.

Wenn man eine Zahl, welche sich nicht mit Nullen schließt, durch eine Rang-Einheit dividiren soll; so ist die Sache leicht geschehen. Man schneide nemlich von dem Producte, hinten so viel Ziffern ab, als die Rang-Einheit Nullen hat. Die alsdann vorwärts zurückgebliebenen Ziffern setze man als die Integralzahl des Quotienten, und füge ihnen bey, die abgeschnittnen Ziffern, als einen Bruch, dessen Nenner der Divisor, oder die Rang-Einheit ist, z. E. $\frac{456}{10} = 45\frac{6}{10}$. So auch $\frac{4567}{100} = 45\frac{67}{100}$. So auch $\frac{123405}{1000} = 123\frac{405}{1000}$. Denn die vorwärts vor dem Abschnitte stehenden Ziffern, sind als ein Product anzusehen, das noch so viel verborgne Nullen hinter sich hat, als hinten Ziffern abgeschnitten sind. Soll nun dieses Product durch eine Rang-Einheit, welche eben so viel Nullen hat, dividirt werden; so fallen die Nullen weg, und die vordersten Ziffern bleiben, als der Quotient, übrig, wie eben ist erwiesen worden. Alsdann wären aber noch die hinten abgeschnittnen Ziffern, durch die Rang-Einheit,

als durch den Divisor, zu dividiren, um den ganzen Quotienten zu haben. Aber, da die abgeschnittnen Ziffern etwas Kleineres bedeuten, als die Rang-Einheit ist, wodurch dividirt werden soll: so ist dieser Theil des Quotienten gewiß nichts anders als ein Bruch, z. E. $\frac{45678}{100} = \frac{45600}{100} + \frac{78}{100} = 456 + \frac{78}{100} = 456\frac{39}{50}$.

§ 57.

Wenn der Lernende eine überzeugende Einsicht in obige Sätze erlangt hat; so muß man ihn gewöhnen, aus der Beschaffenheit des Products und des Divisors, beym ersten Anblicke, einzusehen, wie viel in Decimalordnung geschriebne Theile der Quotient haben müsse.

Man lehre ihn also den Divisor regelmäßig unter das Product setzen. Er steht regelmäßig darunter, wenn er so weit nach den vornehmsten Rangzahlen des Products hervor geschoben steht, als die Grösse des Divisors es immer leidet. Sie leidet es aber nicht mehr, wenn, woferne man den Divisor weiter fortrücken wollte, die über ihm stehenden Ziffern (ohne Betrachtung der Grösse, welche ihnen von denen weiter zur Rechten stehenden Ziffern, wohin der Divisor nicht reicht, gegeben wird,) eine kleinere Zahl bedeuteten, als der Divisor selbst ist. z. E. Das Product 87 und der Divisor 6, stehen regelmäßig so: $\genfrac{}{}{0pt}{}{87}{6}$. So auch $\genfrac{}{}{0pt}{}{192}{2}$. So auch $\genfrac{}{}{0pt}{}{1632}{15}$. So auch $\genfrac{}{}{0pt}{}{1632}{18}$. So auch $\genfrac{}{}{0pt}{}{4532}{442}$. So auch $\genfrac{}{}{0pt}{}{4532}{680}$.

Die Vorstellung der Multiplication lehret, daß wenn der Divisor unter dem Producte regelmäßig

stest,

steht, die Anzahl der in Decimalordnung geschriebenen Theile des Quotienten, der Anzahl derjenigen Ziffern des Products gleich sey, welche man zählet, wenn man von hinten anfängt, und zuletzt diejenige Ziffer noch mit rechnet, welche über der letzten Ziffer des Divisors steht. z. E. Der Quotient von $\frac{12345}{6231}$, hat nur eine einzige Ziffer, welche Einheiten bedeutet. Denn der Bruch, welcher dabey kömmt, wird hier für keine Ziffer gerechnet. Der Quotient $\frac{532}{9}$, hat zwey Theile, davon der erste Zehnel, der andre Einel anzeigt. Der Quotient $\frac{56838}{24}$, hat vier Theile, nemlich Tausende, Hunderte, Zehnel und Einel. Doch ist nicht selten eine oder die andere von den letzten Stellen mit Nullen bedeckt. Was ich hier gesagt habe, läßt sich nicht wohl anders, als durch eine lebhafte Vorstellung von dem, was in der Multiplication geschicht, erweisen. Denn man sieht z. E. sehr leicht, daß wenn $\frac{364302}{14}$ so geschrieben sind, der Divisor die Multiplication durch eine solche Rangzahl, wenigstens durch eine solche Rangeinheit leide, welche so viel Nullen hat, als hinten Ziffern des Products sind, wohin der regelmäßig gesetzte Divisor nicht reichet. Also muß der Quotient so viel, und einen mehr, Theile haben, als die Anzahl dieser Nullen zeiget.

Man gewöhne sich bey dem Dividiren, wenn das Product und der Divisor erst regelmäßig stehen, hinter ihnen ein solches Zeichen | . . . ., und hinter demselben so viel Puncte zu machen,

als

als der Quotient Theile haben wird. z. E.
4321 | . . .
14

Wird nun der Quotient nur eine einzige Ziffer haben; so ist die Art der Division sehr leicht zu erklären. Man finde nemlich durch Versuche, den hochstmöglichen Factor, welcher, multiplicirt durch den Divisor, ein für das Dividendum nicht zu grosses Product giebt. Dieser höchstmögliche Factor muß nothwendig die rechte Integralzahl des Quotienten seyn. Durch dieselbe multiplicire man den Divisor, und setze das Product nach der Decimalordnung unter das Dividendum. Man subtrahire, und schreibe den Rest, als einen Bruch, dessen Nenner der Divisor ist, zu dem schon gefundnen Integralquotienten; so hat man diejenige Zahl, welche, multiplicirt durch den Divisor, dem Dividendo gleich ist, und also den rechten Quotienten.

z. E. 12189 | 3 So auch 12298 | $3\frac{109}{4063}$

z. E.		So auch	
12189	3	12298	$3\frac{109}{4063}$
4063		4063	
12189		12189	
0		109	

§ 58.

Hat nun der Quotient verschiedene Theile, z. E. Zehnel und Einel; oder Hunderte, Zehnel und Einel; oder Tausende, Hunderte, Zehnel und Einel; oder Tausende, zwey Nullen und Einel u. s. w. **so findet man den ersten Theil des Quotienten,** wenn man versucht, durch welche höchstmögliche Rangzahl, (nemlich von dem höchsten Range, welcher in dem zum voraus beurtheil-

ten Quotienten vorkömmt,) der Divisor multiplicirt werden dürfe, ohne daß das Product dem Dividendo überlegen werde. Diese Rangzahl ist ganz gewiß der erste Theil des Quotienten. Denn wollte man eine grössere nehmen; so würde der Divisor, multiplicirt durch den Quotienten, grösser, als das Dividendum werden, da doch dieses Product dem Dividendo gleich seyn soll. Man stellt sich aber die höchstmögliche Multiplication eines Divisors durch eine Rangzahl am leichtesten vor, und man erfindet also den ersten Theil des Quotienten am leichtesten, wenn man anfangs den Divisor regelmäßig unter das Dividendum setzet (§ 58). Denn wer alsdenn diejenige Division versteht, deren Quotient nur eine Ziffer hat, (§ 57.) wird eben so leicht die Rangzahl, oder den ersten Theil des Quotienten finden. Warum dieses? Weil die erste Rangzahl, ausser ihrem Range, als blosse Ziffer betrachtet, keine andre ist, als die Ziffer, welche der Quotient seyn würde, wenn die Division durch den Divisor nur bloß mit denen Ziffern des Dividendi, welche über dem regelmäßig gesetzten Divisor stehen, geschehen sollte. Soll ich zum Exempel zu $\frac{452684}{211}$ den ersten Theil des Quotienten suchen; so ist er dieselbe Anzahl von Tausenden, welche die Division $\frac{452}{211}$ von Einern geben würde.

Hievon überzeugen uns die erkannten Regeln der Multiplication. Denn mit vielen Worten läßt sich hier nichts ausrichten. Und eben diese Regeln überzeugen uns in allen Fällen,

 wo

wo das Product und der Divisor regelmäßig geschrieben sind.

Hat man den ersten Theil des Quotienten; so mache man das Product vermittelst der Multiplication dieses ersten Theiles durch den Divisor. Dieses Product subtrahire man vom Dividendo. Der Rest heisse R; so hat man, wenn das Dividendum D, der Divisor, d heißt, $\frac{D-R}{d}$ gefunden. Da man nun den ganzen Quotienten zu haben, $\frac{D}{d}$ finden sollte; so ist noch $\frac{R}{d}$ zu finden übrig. Man setze also unter den Rest den Divisor regelmäßig, und verfahre wie zuvor; so findet man den zweyten Theil des Quotienten, Sollte aber dieser zweyte **Theil des Quotienten** keine solche Rangzahl seyn, die in der Decimal-Ordnung auf den ersten unmittelbar folgt; so muß man die mittlern Stellen im Quotienten mit Nullen bedecken. Mit einem Worte, man muß durch die Nullen jeden Rang der Ziffern gehörig anzeigen. Nun sey der zweyte Theil des Quotienten gefunden; so mache man das Product durch den Divisor, man subtrahire es von R. Der Rest heisse r. So ist gefunden $\frac{D-r}{d}$. Da man nun $\frac{D}{d}$ finden sollte; so ist noch $\frac{r}{d}$ zu finden übrig. Hier verfahre man wie zuvor, bis kein Rest, oder ein solcher Rest kömmt, der kleiner als der Divisor, und also ein solch Dividendum ist, welches man nur als einen Bruch ansehen darf. Diesen **Bruch** schreibe man zu dem gefundenen Integral-Quotienten; so hat

hat man in allem zusammen die Zahl, welche, multiplicirt durch den Divisor, dem Dividendo gleich ist, und also den rechten Quotienten.

```
  12124848 | (1''+2'+3°)=123.
  98576    |
  9857600  |
 ----------
  2267248
   98576
  1971520
 ----------
   295728
    98576
   295728
 ----------
      0
```

```
 12124999  | (1''+2'+3°) 151/98576 = 123 151/98576.
 98576(00) |
 ----------
 2267399
  98576
 1971520
 ----------
  295879
   98576
  295728
 ----------
    151
```

```
 981080009 | 109008889 8/9
 9         |
 900000000
 ----------
 81080009
```

81080009
9
81000000
———
80009
9
72000
———
8009
9
7200
———
809
9
720
———
89
9
81
———
8

Anmerkung.

Wenn der Lernende erst durch diese Weitläuftigkeit den rechten Begriff erlangt hat; so zeige man ihm die kürzere Art, welche folget. Sie ist der vorigen Rechnung ähnlich, nur daß (nicht die Abzüge, welche man weggewischt hat,) sondern bloß die Reste geschrieben, und Nullen, welche schon durch die Stelle angezeigt werden, ausgelassen sind. Und diese Art zu dividiren ist rathsam, wenn der Divisor nur eine oder nur zwo Ziffern hat.

8888
981080009 | $109008889\frac{8}{9}$
9.9..9999

1
15624
1304376 | 56712
233333
2222

1 1
156253
1304389 | $56712\frac{13}{23}$
233333
2222

Hingegen zeigen die beyden ersten Exempel, wie es, des Nachsehens halber, alsdann, wenn der Divisor 3 und mehr Ziffern hat, zu dividiren

am

am bequemsten sey. Die Geübten werden sich leicht gewöhnen, die Nullen, welche durch die blosse Stelle der Ziffern schon angezeigt sind, auszulassen, z. E.

```
72808008 | 200022
364      |
728(00000)
--------
   8008
   364
   728(0)
   ------
    728
    364
    728
   -----
      0
```

Anmerkungen.

Die in Parenthese gesetzte Nullen sind überflüßig.

Aus diesem Exempel sieht man, warum es nützt, für die einzelnen Ziffern, und Vice-Ziffern, die der Quotient haben wird, gleich Anfangs Puncte zu machen. Der jedesmal zu findende Theil des Quotienten gehört allemal in die Stelle desjenigen Puncts, der so viel Puncte nach sich hat, als der regelmäßig gesetzte Divisor noch Nullen hinter sich litte, ohne über die Stelle der Einer hinüber zu reichen.

§ 59.

Man sagt, daß eine Zahl **in einer andern, oder durch dieselbe aufgehe**, wenn jene, dividirt durch diese, keine unreine, sondern reine Integralzahl zum Quotienten giebt, z. E. 12 geht durch 4 auf. Denn $(12:4)=3$. Aber 13 geht durch 4 nicht auf, denn $(13:4)=3\frac{1}{4}$.

Es ist jemanden, der viel zu rechnen hat, daran gelegen, daß er auf eine leichte Art wisse, ob durch eine gewisse Zahl eine andre aufgehe, oder nicht. Durch diese Fertigkeit, wird die Mühe, Brüche zu verkleinern, sehr erleichtert, und sie dienet auch zu andern Zwecken.

Jede gerade Zahl, z. E. 4, 14, 26, 1032, geht durch 2 auf.

Wenn die Ziffern in die Quere addirt, eine Summe geben, welche durch 3 aufgeht, so geht die Zahl, in Decimalordnung betrachtet, auch in 3 auf. z. E. 34551.

Wenn die beyden letzten Ziffern einer Zahl in 4 aufgehen; so geht die ganze Zahl darinnen auf. z. E. 68392.

Durch 5 gehn auf alle Zahlen, deren letzte Ziffer 5, oder eine Nulle ist. z. E. 125685 oder 3280.

Durch 6, eine jede grade Zahl, deren Quersumme in 3, 6, oder 9 aufgeht. z. E. 5172, oder 336642 oder 185418.

Durch 7 gehn zwar viele Zahlen auf. Aber man hat keine leichte Regel.

Durch 8 gehn auf diejenigen Zahlen, deren 3 letzte Ziffern durch 8 aufgehen. z. E. 5432136.

Durch 9, diejenigen Ziffern, deren Quersumme durch 9 aufgeht. z. E. 531234.

Durch 10, alle Rangzahlen. z. E. 50, 700, 60000, 7200000.

Durch 11, gehn auf 1) zwo neben einander stehende gleiche Zahlen, z. E. 44. 2) Eine Zahl von 3 Ziffern, deren mittelste so groß ist, als die Summe der äussersten. z. E. 154.

Durch 25 gehn auf 1) alle Zahlen, die sich mit 2 oder mehr Nullen schliessen. Z. E. 5400, oder 682000. 2) Die sich mit 25, oder 50, oder 75 schliessen. z. E. 84325, oder 7175, oder 6850. Durch diese Kenntniß wird man oft in einem

einem Augenblicke sehen, daß sich ein durch viele Ziffern geschriebener Bruch, so, oder anders, verkleinert ausdrücken lasse.

Es sey P ein Product, D sey ein Divisor, Z sey der Zähler des Bruchs, welcher zur Integralzahl hinzukömmt, wenn man P durch D dividirt, z. E. 27 sey P; 4 sey D. So ist $\frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$. Es ist also Z in diesem Falle = 3. Denn der Bruch von erwähnter Art ist $\frac{3}{4}$.

Wenn sowohl D als Z, (sowohl der Divisor als Zähler des gebrochnen Quotienten-Theiles) in einer Zahl X aufgehen; so geht das Product P darinnen auf. Denn P ist alsdann als aus zweyen Theilen Y+Z bestehend, anzusehen. Y geht in D auf, also auch in diejenige Zahl, worinnen D aufgeht, also in X. Geht nun auch Z in X auf; so muß auch (Y+Z), und also P, in X aufgehen. Z. E. $\frac{156}{16} = 9\frac{12}{16}$. Es geht so wohl 12 als 16 in 4 auf. Also muß auch 156 so aufgehen.

Eine Zahl X, durch welche P und D, beyde aufgehen, heißt dieser beyden Zahlen **gemeinschaftlich Maaß**. z. E. 16 ist das gemeinschaftliche Maaß von 144 und 160, weil beyde dadurch aufgehen.

Wenn man von zweyen Zahlen, die grössere durch die kleinere dividirt, und keine unreine Zahl sondern eine reine Integralzahl findet; so ist die kleinere Zahl das gemeinschaftliche Maaß der grössern und kleinern. Denn eine jede Zahl geht durch sich selbst auf. Da nun bey diesem Falle auch die grössere durch die kleinere aufgeht; so gehn beyde durch dieselbe auf. Die kleinere ist

also das gemeinschaftliche Maaß. Und da keine Zahl ein Maaß hat, welches grösser als sie selbst seyn sollte; so ist auch niemals ein gemeinschaftliches Maaß zweyer Zahlen grösser, als die kleineste unter denselben. **Wenn also eine Zahl durch die andere aufgeht; so ist diese andre, das gröste gemeinschaftliche Maaß beyder.**

Wenn das Product P, durch den Divisor D, nicht aufgeht; sondern nebst dem Integralquotienten ein Bruch $\frac{Z}{D}$ entsteht; so haben P und D, kein ander gemeinschaftlich Maaß, als ein solches, welches auch das gemeinschaftliche Maaß von Z und D ist. **Also ist das gröste gemeinschaftliche Maaß von Z und D, auch das gröste gemeinschaftliche Maaß von P und D.**

Daher findet man das gemeinschaftliche gröste Maaß zweyer Zahlen, wenn man sie durch einander dividirt, nemlich die gröste durch die kleinste; und Achtung giebt, ob jene durch diese aufgehe. Geschicht dieses; so ist die kleinere Zahl das gröste gemeinschaftliche Maaß beyder. z. E. 4 ist das gemeinschaftliche Maaß von 16 und 4, weil 16 durch 4 aufgeht. Wenn aber die gröste Zahl durch die kleinste nicht aufgeht; so dividire man die beyden Zahlen des kommenden Bruchs durch einander; so ist das gröste Maaß dieser Bruchzahlen, auch das gröste Maaß des ersten Paares. Kömmt aber wieder ein Bruch; so suche man das gröste Maaß des dritten Paares, welches auch das gröste Maaß des zweyten und folglich des ersten Paares ist. Sollte abermals

ein Bruch kommen; so suche man das größte Maaß des vierten, oder ferner des fünften, oder ferner des sechsten Paares, u. s. w. Das zuletzt gefundne Maaß des letzten Paares, ist auch das größte Maaß eines jeden vorhergehenden, folglich auch des ersten Paares, dessen größtes Maaß man gesucht hat. Und weil man einen Bruch dadurch verkleinert ausdrückt, wenn man Zähler und Nenner durch ihr gemeinschaftlich Maaß dividirt, und den Quotienten des Zählers zum Zähler, aber den Quotienten des Nenners zum Nenner macht; so ist dieses allgemeine Mittel, das größte gemeinschaftliche Maaß zu finden, zugleich eine Art, den verkleinerten Ausdruck eines Bruchs, alsdann zu suchen, wenn uns das gemeinschaftliche Maaß, nach den obigen Anmerkungen von den Zahlen nicht gleich in die Augen fällt. z. E. Wenn der Bruch $\frac{65}{104}$ verkleinert werden sollte; so dividire man 104 durch 65; es kömmt $1\frac{39}{65}$. Man dividire abermals 65 durch 39; es kömmt $\frac{26}{39}$. Man dividire abermals 39 durch 26; es kömmt $1\frac{13}{26}$. Man dividire abermals 26 durch 13; es kömmt die Integralzahl 2. Es ist also 13 das größte gemeinschaftliche Maaß der beyden ersten Zahlen, nemlich 65 und 104, und der Bruch $\frac{65}{104} = \frac{65:13}{104:13} = \frac{5}{8}$.

§ 60.

Ich will von der Division nur noch dieses berühren, daß das Product und der Divisor in mathematischen Wissenschaften, (selten aber in an-

dern Arten des Rechnens) aus algebraisch ausgedrückten Zahlen bestehe, und daß die Universaldivision nichts anders, als eine Division so ausgedrückter Zahlen sey, z. E. $\frac{aa - bb - 2ad + dd}{a - b - d} = a + b - d$. Daß dieser Quotient der wahre sey, wird man bald sehen, wenn man ihn durch den Divisor multipliciren will. Wer die Fertigkeit hat, die Universal-Addition, Subtraction und Multiplication anzuwenden, der wird auch leicht durch versuchte Multiplication solche Quotienten zu finden, oder algebraische Zahlen zu dividiren wissen. Und kaum ist es nöthig zu sagen, 1) daß (da Positives, multiplicirt durch Positives, auch ein positives Product giebt,) in der Division gleichfalls ein positives Product, wenn es durch einen positiven Divisor dividirt wird, auch einen positiven Quotienten gebe. (§. 46.) Z. E. $\frac{+12}{+3} = +4$. Wenn aber 2) das Product und der Divisor ungleiche Zeichen haben, das ist, wenn eins unter ihnen positiv, das andere negativ ist: so muß, vermöge der Regel in der Universalmultiplication, der Quotient negativ seyn, z. E. $\frac{+12}{-3} = -4$. Warum? Weil $(-3) \times (-4) = +12$. So ist auch $\frac{-12}{+3} = -4$. Denn $(+3) \times (-4) = (-12)$. Ist das Product und der Divisor beyderseits negativ; so muß der Quotient positiv seyn, z. E. $\left(\frac{-12}{-3}\right) = (+4)$. Warum dieses? Weil $(-3) \times (+4) = (-12)$. Dieses sind die

Regeln

Regeln alle, welche man bey der Universaldivision zu wissen braucht. Doch noch eins! So lange der gefundene Quotient, noch einen kürzern und verständlichern Ausdruck leidet; muß man ihn, durch Anwendung der 4 Universalarten zu rechnen, in denselben verwandeln.

Das Fünfte Hauptstück.

Von der relativen Multiplication, von der Verwandlung und Berechnung benahmter Zahlen.

§ 61.

Ehe ich mich zu der Proportion, als dem einzigen Grunde der meisten practischen Rechnungen wende; muß ich noch einer Art der Multiplication gedenken, welche uns oftmals bequemer zum Zwecke führt, und darinnen besteht, daß wir uns gewisse Theile eines Factors besonders vorstellen, z. E. Es läßt sich ja 12, ohne Veränderung der Grösse, als (8+4) oder als (8+3+1) denken. Diese Denkungsart nun, heißt die Zerstreuung des Factors.

Hat man nun einmal einen zerstreuten Factor; so muß man ja den zweyten Factor, welcher, durch diesen zerstreuten, multiplicirt werden soll, durch jeden Theil desselben multipliciren, und alsdann die Specialproducte addiren, z. E. Soll man 20 durch 12 multipliciren, und denkt man 12 wie (8+4), so muß man setzen (20x8)+(20x4).

Ist

Ist nun die Multiplication durch einen Theil des zweyten Factors geschehen; so läßt sich die Multiplication durch den andern Theil, auf eine doppelte Art verrichten. Erstlich, auf die absolute und gewöhnlichste Art, z. E. Setzt man, wenn die Multiplication der Zahl 20, durch die zerstreute Zahl (8+4) geschehen soll, erstlich, 20x8, und alsdann 20x4; so ist diese absolute und gewöhnliche Multiplication gebraucht.

Aber wenn der zweyte Theil des zerstreuten Factors kleiner als der erste, oder überhaupt der nachfolgende Theil desselben kleiner ist als der vorhergehende; so darf man mit Wahrheit den nachfolgenden Theil des zerstreuten Factors, als einen Bruch, oder als einen Theil von dem vorhergehenden Theile des zerstreuten Factors ansehen. Der zerstreute Factor sey (8†4). Weil 4 die Hälfte von 8 ist; so darf ich mir (8†4) in einer andern Denkart auch vorstellen als 8 nebst der Hälfte von 8, das ist, als $(8 \dagger \frac{8}{2})$, oder $8 \dagger (8 \times \frac{1}{2})$. Diese Denkart will ich die Subordination der Theile des Factors nennen.

Der subordinirte Theil, ist durch die Subordination an Grösse gar nicht verändert. Wenn ich also etwas durch einen Theil eines Factors multipliciren soll; so steht es mir frey, ob ich durch ihn entweder in der absoluten, oder subordinirten Gestalt, multipliciren wolle, z. E. 20x(8†4), welches so viel ist, als (20x8)†(20x4), läßt sich auch in der Gestalt von $(20 \times 8) \dagger (20 \times (8 \times \frac{1}{2}))$ denken.

Hieraus

Hieraus erhellet, daß die Multiplication des Factors durch einen subordinirten Theil des andern Factors, kein ander Specialproduct gebe, als einen solchen Theil des nächstvorhergehenden Specialproductes, welcher vermittelst der Multiplication, dieses nächstvorhergehenden Specialproductes durch den Bruch, davon die Rede ist, ausgedrückt wird. z. E. $20 \times 12 = 20 \times (8 + 4) = (20 \times 8) + (20 \times 4) = (20 \times 8) + (20 \times (8 \times \frac{1}{2})) = (20 \times 8) + ((20 \times 8) \times \frac{1}{2})$.

Ich nenne diese Art, nach der Zerstreuung und Subordination, durch einen zerstreuten und subordinirten Theil des Factors zu multipliciren, **die relative Multiplication.** Die meisten Rechenmeister nennen sie das **Ausnehmen**, nemlich aus dem nächstvorhergehenden Specialproducte.

Weil ein solches Ausnehmen, oder ein solches relatives Multipliciren, oft leichter zum Zwecke führt, als das absolute; so ist es in Rechenschulen sehr gebräuchlich. Aber es war höchst nöthig überzeugender, als gemeiniglich geschicht, zu beweisen, daß dieses Ausnehmen nichts anders sey, als eine bequeme Art der Multiplication. Denn, wird dieses nicht eingesehen; so wird aller practischen Rechnung diejenige Klarheit genommen, welche aus der Einsicht entsteht, daß man die 4te Proportionalzahl nicht anders finde, als vermittelst der Multiplication des zweyten durch das dritte Glied, und vermittelst der Division durch das erste Glied.

Um das Ausnehmen, oder die relative Multiplication anzuwenden, ist also nöthig, den Fa-

ctor

ctor gehörig zu zerstreuen, wo er nicht so zerstreut ist; ferner den nächstfolgenden Theil unter den nächstvorhergehenden Theil des Factors zu subordiniren, und endlich das Ausnehmen wirklich auszuüben.

Das Zerstreuen hat keine andere Schwierigkeit, als daß man voraussehen muß, welche Zerstreuung uns in dem wirklichen Ausnehmen die größte Bequemlichkeit verursachen werde. Es ist aber diejenige Zerstreuung am bequemsten, wodurch solche auf einander folgende Theile des Ganzen, gemacht, oder solche Brüche des vorhergehenden Theiles gesetzet werden, die nur die Zahl 1 zum Zähler haben. z. E. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{12}$, u. s. w. Z. E. 39 liesse sich bequem so zerstreuen, 24 + 12 + 3. Denn 12 wäre alsdann $\frac{1}{2}$ von 24, und 3 wäre $\frac{1}{4}$ von 12.

Aber wie findet man den Bruch, welcher einen Theil des Fattors unter den nächstvorhergehenden subordinirt? Dieses geschicht vermittelst der Division des nachfolgenden kleinern Theils, durch den vorhergehenden. Diese Division, da das Product oder der Zähler kleiner ist, als der Divisor oder Nenner, muß einen blossen Bruch geben. Man verkleinere diesen Bruch bis auf den kleinsten Ausdruck; so hat man denjenigen Bruch, wodurch der verlangte Theil des Factors unter den vorhergehenden subordinirt wird. z. E. Soll 4 unter 8 subordinirt werden; so hat man den Bruch $\frac{4}{8}$ oder $\frac{1}{2}$. Sollte man 20 unter 50 subordiniren; so hätte man den Bruch $\frac{20}{50}$ oder $\frac{2}{5}$, welchen man auch als ($\frac{1}{5}$ † $\frac{1}{5}$) der Bequemlichkeit halber,

halber, ansehen dürfte. Nach einiger Uebung lernt man den subordinirenden Bruch sehr leicht finden.

Auch das wirkliche Ausnehmen oder relative Multipliciren hat keine Schwierigkeit. Denn man multiplicirt nur das nächstvorhergehende Specialproduct, durch den subordinirenden Bruch, das ist, man multiplicirt es durch den Zähler, und dividirt das, was kömmt, durch den Nenner; alsdann setzet man den Quotienten, als dasjenige Specialproduct, welches vermittelst der Multiplicirung des einen Hauptfactors durch den subordinirten Theil des andern Factors, entstehen soll. Hieraus folgt, daß, wenn der Zähler des subordinirenden Bruchs nur 1 ist, welches man gemeiniglich durch die Art der Zerstreuung veranstaltet, alsdann das Ausnehmen nichts als ein Dividiren durch den Nenner sey. Z. E. $20 \times \frac{1}{4} = \frac{20}{4} = 5$.

§. 62.

Ehe ein lernender geübt wird, die Zerstreuung zu gebrauchen, ist es nützlich, daß er den Unterschied, oder das Verhältniß verschiedner Münzen, verschiedner Gewichte, verschiedner Maassen, (u. s. w.) entweder memorirt habe, oder nachzuschlagen wisse.

1) Von Münzen.

1 ℳl. hat 16 ß.
1 ß hat 12 ₰.
1 Sechsling hat 6 ₰.
1 Dreyling hat 3 ₰

1 Rthlr. hat 3 ℳl.
1 schlechter Thal. hat 2 ℳ
1 Thlr. im Reiche hat 24 Groschen.

1 Gro-

1 Groschen hat 12 dahin gehörige Pfenninge
1 ℳ Dänisch ½ ℳl.
1 Schilling Dän. ist ½ ßl.
1 Holländ. Gulden hat 20 Stüver; 20 Stüver gelten 22 ßl.
1 Dänischer Courantducaten gilt 6 ℳl.
1 Species Ducaten gilt 7 ℳ 8 ßl. oder 2 Rtl. 18 Groschen.

1 Dän. Krone gilt 34 ßl.
1 Groot ist ½ ßl. od. 6 ₰l.
1 Schilling Vl. hat 12 Groot, folglich 6 ßl.
1 Pfund Vl. hat 20 ß vl. oder ist 1 Spec. Duc.
1 Schill. Sterl. ist 10 ßl.
1 Schill. Sterl. hat 12 ₰ Sterl.
1 Pfund Sterl. hat 20 ß Sterl. oder ist 12 ℳ 8 ßl.

2) Hamburgisches Handels-Gewicht.

1 ℔ hat 32 Loth.
1 Loth hat 4 Quentin.
1 L℔ hat 14 ℔.
1 Centner hat 112 ℔.
1 Schif-℔ hat 280 ℔, oder 20 L℔. Bey Frachten wird das Sch℔ und der Centner anders gerechnet.

1 Stein Flachs hat 20 ℔
1 Stein Wolle oder Federn hat 10 ℔.
1 Pipe Oel (netto, oder ohne Tonne) hat 820 ℔
1 Tonne Butter hat 16 L℔, aber bey den Holländern 20 L℔.

3) Vom Metall-Gewicht.

1 ℔ hat 2 Mark.
1 Mark hat 8 Unzen.
1 Unze hat 2 Loth.
1 Loth hat 1½ Karat oder 6 Gran.
1 Mark hat also 24 Karat.
1 Gran hat 3 Grän.

4) Ellen- und Feld-Maaße.

1 Elle hat 2 Fuß oder Schuh.
1 Fuß hat 12 Zoll.

1 Hamburger Elle ist ⅝ Brabandisch.

1 Ruthe

1 Ruthe ist 8 Ellen.
1 Morgen Landes ist 120 Ruthen lang, und 5 Ruthen breit.
1 Stück Land von einem Scheffel Saat ist 30 Ruthen lang und eine Ruthe breit.

5) Getreide-Maaß.

1 Himten hat 4 Spint.
1 Scheffel hat 2 Faß od. 4 Himten, in einigen Getreiden aber 3 Faß oder 6 Himten.
1 Wispel hat 10 Scheffel.
1 Last hat 3 Wispel, von einigem Getreide aber nur 2 Wispel.

6) Andere Quantitäten.

1 Stübgen hält 4 Quartier.
1 Ahm hat 40 Stübgen.
1 Fuder hat 6 Ahm.
1 Anker hat ordentlich 10 Stübgen.
1 Oxhoft hat 6 Anker.
1 groß Hundert ist 120.
1 groß Tausend ist 1200.
1 Schock ist 60.
1 Steig ist 20.
1 Zimmer ist 40.
1 Mandel ist 15.
1 Dutzend ist 12.
1 Grötgen ist 12 Dutzd.
1 Buch Druckpapier hat 25 Bogen.
1 Buch Schreibpapier hat 24 Bogen.
1 Ries hat 20 Bücher.
1 Ballen hat 10 Ries.
1 Last Salz oder von andern Dingen hat 12 Toñen, aber von Spanisch. Salz 18 Tonn.
1 Monath wird gerechnet auf 30 Tage, ob gleich der Februar nur 28 Tage, u. der Jan. März, May, Julius, August und October 31 Tage haben.
1 Jahr hat 12 Monath oder 365 Tage.
1 Tag wird für 24 Stunden gerechnet.
1 Stunde hat 60 Minut.
1 Min. hat 60 Secunden.

Ein jeder Lehrer der Rechenkunst muß selbst urtheilen, welche benahmte Einheiten dem Lernenden vorzüglich bekannt

bekannt gemacht werden müssen. Denn an jedem Orte ist ander Maaß, ander Gewicht, und andre Münze. Auch muß ein Lehrer Gelegenheit geben, die gewöhnlichen Zeichen der benahmten Einheiten kennen zu lernen. Ich setze hier dieses zum voraus, weil selten jemand ohne Anweisung von einem andern rechnen lernet, und weil derjenige, der es lernen will, entweder die Zeichen schon kennt, oder immer Gelegenheit hat, einige zu fragen.

§ 63.

Ehe ich die Uebung des Zerstreuens in Exempeln zeige, muß ich vorher die Art erklären, wie eine von kleinern Einheiten benahmte Zahl, in eine von grössern Einheiten benahmte Zahl verwandelt werde; und wie man hingegen solche Zahlen, die von grössern Einheiten benahmt sind, in solche verwandle, welche von kleinern Einheiten benahmt werden. Dieses nenne ich die **Nahmenänderung.** Diejenigen Zahlen aber, die man auf solche Weise eine in die andere verwandeln darf, müssen doch gleichartige Dinge bedeuten. Dinge sind **gleichartig**, wenn viele von der einen Art eine Einheit oder eine Zahl von der andern Art ausmachen, z. E. Ein Reichsthaler und ein Pfund Sterling, sind gewissermassen gleichartig. Denn sie sind beyde Geldsorten, und eine gewisse Menge von Thalern, bedeutet eben dasselbe, was eine gewisse kleinere Menge von Pfunden Sterling bedeutet. Aber eine gewisse Zahl von Ducaten, und eine gewisse Zahl von Menschen, oder von Scheffeln Korn, sind ungleichartig.

Man nenne die kleinere gleichartige Einheit K, man nenne die grössere G. Weil K und G gleich-

artig

[illegible]rtig sind; so ist eine gewisse Zahl oder Menge [illegible]on K gleich einer gewissen Zahl oder Menge von [illegible]G, wie z. E. eine gewisse Menge von Thalern so [illegible]iel gilt, als eine gewisse Menge von Pfunden Sterling.

Nun ist eine jede benahmte Zahl anzusehen, als wenn sie durch ihre Einheit, wovon sie benahmt ist, oder durch eine Zahl, welche dieser Einheit gleich gilt, multiplicirt wäre. Mit einem [illegible] die Zahl wird durch die Zahlwürde mul-tipl[illegible], und die Benahmung der Zahl ist so gut als eine Zahlwürde. Darum sind 7 Dutzend eben so viel als 7 x 12.

Nun denke man wieder daran, daß K eine kleinere gleichartige Einheit, und G eine grössere bedeute, z. E. Wenn G ein Thaler ist; so mag K ein Groschen seyn. Nun ist allemahl eine Menge von G (oder in diesem Falle von Thalern,) gleich einer Menge von K, (oder in diesem Falle einer Menge von Groschen). Die Menge nun von K, die einer gewissen Menge von G gleich ist, heisse Y; und die Menge von G, welche jener Menge von K gleich ist, heisse Z. So ist, vermöge des vorigen, YK = ZG. Dieser Hauptsatz ist wohl zu merken.

Nun sey irgend eine Zahl oder Menge welche M heissen soll, von kleineren Einheiten benahmt. Sie ist also MK. Man multiplicire diese Zahl MK, durch die Zahl der grössern Einheiten, welche einer gewissen Zahl von solchen kleinern Einheiten gleich ist. Mit einem Worte, man multiplicire MK durch ZG; so kömmt MKZG.

 Dieses

Dieß Product dividire man durch YK; so kömmt $\frac{MKZG}{YK}$, das ist $\frac{MZG}{Y}$; und doch hat man diese Zahl oder diesen Bruch nur dadurch bekommen, daß man die erste Zahl MK durch etwas multiplicirte, und durch eben das Etwas wieder dividirte; denn ZG ist gleich YK. Die Zahl oder Grösse MK ist also unverändert geblieben, und dennoch jetzund von der grössern Einheit, oder von G benahmt. Denn $\frac{MZG}{Y}$ ist von G benahmt. Das heißt M, von K benahmt, ist eben so viel, als $\frac{MZ}{Y}$ von G benahmt. Hieraus sieht man, daß um eine von geringern Einheiten benahmte Zahl in eine solche, die von grössern Einheiten benahmt, und dennoch gleiches Inhaltes ist, zu verwandeln, jene Zahl durch Z zu multipliciren, und das Product durch Y zu dividiren sey, z. E. 12 Groschen sind $\frac{12 \times 1}{24}$ oder $\frac{12}{24}$ oder $\frac{1}{2}$ von einem Thaler. Warum, weil 1 Thaler und 24 Groschen gleich sind. So auch sind 9 Hamburger Ellen nichts anders, als $\frac{9 \times 5}{6}$, das ist, als $\frac{45}{6}$, das ist, als $7\frac{3}{6}$, das ist, als $7\frac{1}{2}$ Brabander.

Ferner, weil $YK = ZG$; so ist $\frac{MG \times YK}{ZG}$, (das ist $\frac{MY \times K}{Z}$) (das ist, $\frac{MY}{Z}$, wenn es von K benahmt wird, und kleinere Einheiten bedeutet,) noch eben eine solche Grösse, als MG, oder als das von der

der grössern Einheit benahmte M war. Denn $\frac{M Y \times K}{Z}$ ist aus M G, durch gleiche Multiplication und gleiche Division entstanden. Z. E. Wenn 7 Hamburger Thaler, 8 Leipziger Thaler wären, so wären 19 Hamburger Thaler, so gut, als $\frac{19 \times 7}{8}$, oder als $\frac{133}{8}$, oder $16\frac{5}{8}$ Leipziger Thaler.

Um hernach in der vorzutragenden Regel desto kürzer und verständlicher zu reden, will ich ein Paar Redensarten einzuführen suchen. Ich nenne zwey Zahlen alsdenn **Comparationszahlen**, wenn sie anzeigen, welche Zahl von Einheiten dieser Art, gleich sey der Zahl von Einheiten einer andern Art. Z. E. 5 und 6 sind alsdann Comparationszahlen, wenn sie anzeigen, daß 5 Brabander Ellen, 6 Hamburger Ellen sind. So sind auch 1 und 24 Comparationszahlen, wenn sie anzeigen, daß 1 Thaler so gut, als 24 Groschen sey. Ich nenne ferner eine Comparationszahl alsdann irgend einer andern Zahl **gleichnahmig**, wenn sie mit ihr gleichen Namen hat, z. E. die Comparationszahl 48 ist gleichnahmig der Zahl 12 ß, wenn von Schillingen und Thalern die Rede ist, da ein Thaler 48 ß hat. Hingegen 5 Thaler und 48 ß sind ungleichnahmig.

Aus dem kurz vorher geführten Beweise erhellet nun, daß, wenn man eine Zahl in eine andere von gleichem Werthe und von andern Namen, der andere Einheiten bedeutet, verwandeln wolle, daß man, sage ich, alsdann diese zu verwandelnde Zahl durch die ungleichnahmige

Comparationszahl multipliciren und das Product durch die gleichnahmige Comparationszahl dividiren müsse; und daß alsdann diese Verwandlung geschehen sey. Und hieraus erhellet ferner, daß, wenn die ungleichnahmige Comparationszahl nur 1 ist, die Verwandlung durch blosse Division vermittelst der gleichnahmigen geschehe; gleichwie die Verwandlung hingegen vermittelst der blossen Multiplication durch die ungleichnahmige Comparationszahl alsdann geschicht, wenn die gleichnahmige nur 1 wäre. z. E. 14 Groschen sind $\frac{14 \times 1}{24}$ Thaler, oder $\frac{14}{24}$, oder $\frac{7}{12}$ Thaler. Und 6 ℔ sind $\frac{6 \times 14}{1}$ an Pfunden, oder 84 ℔. Hingegen will ich Amsterdammer Gewicht, in Hannöverisch verwandeln; so muß ich wissen, daß 98 Amsterdammer Pfund so viel wiegen, als 102 ℔ Hannöverisch Gewicht. Sind nun 24 Amsterdammer Pfund, im Hannöverischen Gewichte auszudrücken; so muß ich durch die ungleichnahmige Comparationszahl, nemlich durch 102 multipliciren, und durch die gleichnahmige, nemlich durch 98, dividiren. Daher sind 24 A. Pfund so viel, als $\frac{24 \times 102}{98}$ an Hannöverschen Pfunden, oder als $24\frac{48}{49}$. Ich überlasse jedem Lehrer das Urtheil, wie lange, ehe man weiter geht, die Uebung dieses Verwandelns, mit Münzsorten, Gewichten und Maassen anzustellen sey.

§ 64.

Es ist eine durchgängige Gewohnheit, am Ende seiner Rechnung niemals eine solche Summe

me zu schreiben, worinnen theils grössere, und theils so viel kleinere Einheiten vorkommen, als erfordert werden, um eine oder mehr von den grössern Einheiten auszumachen. Man schreibt z. E. nicht, 17 Schtb + 310 tb; sondern entweder die Schiffpfunde werden in Pfunde verwandelt, und man schreibt anstatt des Vorigen 5070 tb; oder man nimmt erst aus der Zahl der Pfunde, die Zahl der Schiffpfunde, die darinnen sind, heraus, und schreibt, 18 Schtb 30 tb, oder welches einerley ist, 18 Schtb 2 Ltb 2 tb.

Eben also leidet man keinen Bruch, bey der von grössern Einheiten benahmten Zahl, wenn sie kleinere Einheiten neben sich hat. Z. E. Man schreibt nicht, 18⅓ Rthlr. 5½ Grosch. 3 ₰; sondern man verwandelt die Brüche alsdann in kleinere Einheiten. Man schreibt also 18 Rthlr. 13 Grosch. 9 ₰.

So bald man dieses weiß, so hat die **Addition benahmter Nebentheile**, und auch solcher, davon ein jeder aus verschiedentlich benahmten Zahlen besteht, keine Schwierigkeit. z. E. (15 Schock 40 Stück) + (2 Schock 32 Stück) sind in einer Summe, 18 Schock 12 Stück.

Nicht viel mehr Schwierigkeit wird **die Subtraction bey solchen benahmten Zahlen** haben. Wenn nemlich in der Hauptsumme, solche von kleinern Einheiten benahmte Zahlen nicht sind, als in dem Abzuge stehen; oder wenn die so benahmte Zahlen der Hauptsumme zu klein sind für die so benahmten Zahlen des Abzuges; so versetzt man eine grössere Einheit der Hauptsumme in die

Classe der kleinern Einheiten, und verrichtet alsdann die Subtraction. z. E. (6 Thlr. 0 Schill. 3 ₰) — (3 Thlr. 19 Schill. 8 ₰) = (5 Thlr. 48 ß 3 ₰) — (3 Thlr. 19 ß 8 ₰) = 5 Thaler 47 ß 15 ₰ — (3 Thaler 19 ß 8 ₰) = (2 Thlr 28 ß 7 ₰). Auch hierinnen braucht der Anfänger eine starke Uebung.

Man hat auch in benahmten Zahlen eine **Multiplication.** Und zwar erstlich eine solche, die nur durch einen benahmten, und durch einen unbenahmten Factor geschicht. Diese Multiplication zu begreiffen, hat gar keine Schwierigkeit. Man multiplicirt nemlich, wie es überhaupt der Begriff von dem Multipliciren erfordert, jeden Theil des benahmten Factors durch den unbenahmten. Hiedurch bekömmt man so viele vorzügliche Specialproducte, als verschiedentlich benahmte Theile des benahmten Factors da sind. Und diese **Specialproducte führen den Namen** desjenigen Theiles von dem benahmten Factor, aus dessen Multiplication sie entstanden sind. Denn eine gleiche Menge von einem gewissen Haufen der Pfenninge, behält eben sowohl den Namen der Pfenninge, als eine eben solche Menge von einem Haufen der Thaler, den Namen der Thaler führet. Hat man nun solche Specialproducte, und verwandelt man alles dasjenige, was nach der vorigen Anmerkung zu verwandeln ist; so hat man das ganze Product in dem gewöhnlichen Ausdrucke, z. E. 15 x (3 Schtb 2 Ltb 12 tb) = (45 Schtb 30 Ltb 180 tb) = (45 Schtb 42 Ltb 12 tb) = (46 Schtb 2 Ltb 12 tb), welches der gewöhnliche Ausdruck ist.

Hin-

Hingegen sollte man sich fast verwundern, wie und warum zwey benahmte Factoren, besonders wenn ein jeder unter ihnen verschiedentlich benahmte Theile hat, und wenn die ganzen Factoren unter einander sehr ungleichartig sind, durch einander multipliciret werden, z. E. Warum und wie multipliciret man 12 Lth. 6 ℔, durch 13 ℳ 8 ß. Ich will auf die Frage, Warum? zuerst antworten.

Man erinnere sich zuerst, daß eine Zahl, welche verschiedentlich benahmte, und doch gleichartige Theile hat, (durch Verwandlung der, von geringern Einheiten benahmten Zahlen, in Brüche von der grössesten Einheit, davon in dieser ganzen benahmten Zahl die Rede ist,) eine unreine Zahl dieser grössesten Einheiten werde, z. E. 14 ℳ 8 ß 6 ₰ ist ja $14 + \frac{8}{16} + \frac{6}{192}$ ℳ, $= 14 + \frac{1}{2} + \frac{1}{32}$ ℳ $= 14 + \frac{17}{32}$ ℳ.

Es geschicht aber oft, daß eine benahmte Zahl, auch eine solche, welche aus mehrerern verschiedentlich benahmten Theilen besteht, nach unserer Absicht, einer Zahl X gemäß soll gesetzt, oder durch X multiplicirt werden. Wenn nun X eine unreine Integralzahl ist; so läßt sich ja X ausdrücken durch eine benahmte Zahl, welche aus verschiedentlich benahmten Theilen besteht, z. E. Die Zahl $14\frac{17}{32}$ wird vorgestellt durch die benahmte Zahl 14 ℳ 8 ß 6 ₰. Und in solchem Falle sind beyde Factoren benahmt, und oftmahls sehr ungleichartig.

Bey solchen Multiplicationen aber muß man aufmerksam darauf seyn, welcher von beyden Factoren eigentlich dem andern gemäß gesetzt werden,

und also der Hauptfactor seyn soll, weil sich der Nahme des Products, nach dem Nahmen dieses Hauptfactors richtet, indem es unsere Absicht so will. Soll man eine Zahl, welche Gewichte anzeigt, durch eine Zahl multipliciren welche Geld bedeutet; so bekömmt man, wenn der Hauptfactor Geld ist, auch Geld im Producte, gleich wie das Product Gewicht bedeuten würde, wenn der Hauptfactor Gewicht wäre. Nun habe ich die Frage, **Warum?** beantwortet.

Wie soll nun durch solche ungleichartige benahmte Factoren multipliciret werden? Antw. Auf zweyerley Art, wie man es am bequemsten findet.

Erstlich, man verwandle beyde Factoren in unreine Integralzahlen, und diese wiederum in Brüche; multiplicire die Brüche durch einander, und gebe dem Producte den Nahmen der größten, in dem Hauptfactor erwehnten, Einheit. Und wenn alsdann das Product eine unreine Zahl ist; so verwandle man die Brüche in kleinere gleichartige Einheiten, z. E. Es mögen die Factoren seyn 7 ℳ 8 ß, als der Hauptfactor; und der Nebenfactor 2 L℔ 3 ℔; so mache man $7\frac{1}{2} \times 2\frac{3}{14}$, oder $\frac{15}{2} \times \frac{31}{14}$, oder $\frac{465}{28}$, das ist $\frac{465}{28}$ ℳ, das ist $16\frac{17}{28}$ ℳ, das ist 16 ℳ 9 ß $8\frac{16}{28}$ pf. das ist 16 ℳ 9 ß $8\frac{4}{7}$ pf.

Zweytens, findet man es aber bequemer; so darf man auch die relative Multiplication, oder das sogenannte Ausnehmen gebrauchen, wovon in dem folgenden Paragraphen ein Exempel vorkömmt.

Noch

Noch ist die **Division durch benahmte Zahlen** zu betrachten. Hier sind das Product und der Divisor, aus Ursachen, welche eben itzund bey der Multiplication gesagt sind, auch oftmals benahmte Zahlen, davon eine jede zuweilen in Betrachtung der andern ungleichartig ist, und zuweilen noch aus verschiedentlich benahmten Theilen besteht. Es wird zuweilen dividirt, wie z. E. 16 Mk 9 ß $8\frac{4}{7}$ ₰, entweder durch 7 Mk 8 ß, oder in andern Fällen durch 2 Ltb 3 ℔.

Hier beunruhigt einen Anfänger vielleicht die erste Frage, welchen Nahmen der Quotient führen solle. Diese Frage läßt sich aus dem blossen Begriffe von denen durch einander zu dividirenden Zahlen, allein nicht beantworten. Denn vermöge der, bey der Multiplication gemachten, Anmerkung, entsteht ein Product, welches Geld bedeutet, wenn nur der Hauptfactor Geld anzeiget; oder es entsteht ein Product, welches Maasse bedeutet, wenn nur der Hauptfactor Maasse anzeiget. Und eben so ist es auch in andern Fällen, wobey der Nebenfactor allerley Nahmen haben mag, weil, wenn die Zahlen nur die gehörige Beschaffenheit haben, alsdann in allen Fällen einerley Product gleiches Nahmens kömmt. Aber dennoch darf man in der Ausübung annehmen, **daß der Quotient gleichartig ist mit dem Dividendo oder Product**, weil man durch die Ausübung einer solchen Division allemahl die Zahl derer, dem Dividendo gleichartigen, Dinge wissen will, welche, wenn sie dem Divisor gemäß gesetzt, das ist, wenn sie durch denselben multiplicirt wird, ein dem Di-

videndo gleiches Product giebt, wodurch solche gleichartige Dinge angezeigt werden, z. E. Wenn ich 10 ℳ 8 ß durch 3 Himten 2 Spint dividire; so dividire ich eigentlich 10 ℳ 8 ß durch $3\frac{1}{2}$, und will die Zahl X von ℳ und Schilling wissen, welche, multiplicirt durch $3\frac{1}{2}$, 10 ℳ 8 ß giebt.

Was nun die Ausübung dieser Division betrifft; so ist es eine allgemeine Nothwendigkeit, den Divisor, wenn er aus verschiedentlich benahmten Theilen besteht, zu einer unreinen Zahl, und ferner zu einem Bruche zu machen. Aber das Dividendum darf ich entweder so lassen, als es ist, und die einzelnen Theile nach einander dividiren, und so den Quotienten zusammen setzen: oder wenn es mir bequemer scheint; so darf ich auch das Dividendum in eine unreine Zahl und alsdann in einen Bruch verwandeln, worauf die Division, wie mit Brüchen durch Brüche geschicht, und zuletzt der Quotient gehörig verwandelt wird. z. E. 16 ℳ 9 ß $8\frac{4}{7}$ ₰, dividirt durch 2 L℔ 3 ℔, oder durch $2\frac{3}{14}$, oder durch $\frac{31}{14}$, ist so viel, als

$$(16 : \tfrac{31}{14}\,\text{ℳ}) + (9 : \tfrac{31}{14}\,\text{ß}), + (8\tfrac{4}{7} : \tfrac{31}{14}\,\text{₰}) = (\frac{16 \times 14}{31}\,\text{ℳ}) + \frac{9 \times 14}{31}\,\text{ß} + (\tfrac{60}{7} \times \tfrac{14}{31}\,\text{₰}) = \frac{224}{31}\,\text{ℳ} + \frac{126}{31}\,\text{ß} + \tfrac{840}{217}\,\text{₰} = 7\tfrac{7}{31}\,\text{ℳ} + 4\tfrac{2}{31}\,\text{ß} + 3\tfrac{189}{217}\,\text{₰} = 7\,\text{ℳ}\,7\tfrac{21}{31}\,\text{ß} + 3\tfrac{189}{217}\,\text{₰} = 7\,\text{ℳ}\,7\,\text{ß} + 11\tfrac{4}{31} + \tfrac{189}{217}\,\text{₰} = 7\,\text{ℳ}\,7\,\text{ß}\,11\frac{4\times7}{31\times7} + \tfrac{189}{217}\,\text{₰} = 7\,\text{ℳ}\,7\,\text{ß}\,11\tfrac{217}{217}\,\text{₰} = 7\,\text{ℳ}\,8\,\text{ß}.$$

Fände man es aber bequemer; so dürfte man auch das Dividendum, 16 ℳ 9 ß $8\frac{4}{7}$ ₰ ansehen, als $16\frac{816}{1344}$ ℳ, oder als $\frac{22320}{1344}$ ℳ, und durch $\frac{31}{14}$ dividiren; so wie Brüche durch Brüche dividirt

dirt werden. Auch alsdann muß der Quotient 16 ℔ 8 ß kommen.

§. 65.

Durch das Gesagte, wird eine leichtere Einsicht in die Zerstreuung des Factors und in das so genannte Ausnehmen befördert werden. Ich will nur 2 Exempel geben. 1) Es sey zu multipliciren durch 814, die Zahl 3 Thlr. 17 Gr. 9 Pf. Hier multiplicire man zuerst 814 durch 3. Das Product bedeutet Thaler. Man muß aber auch 17 Groschen durch 814 multipliciren. Thäte man dieses ohne Kunst; so würde man eine große Menge Groschen bekommen, welche man hernach mit Mühe in den Ausdruck von Thalern verwandeln müßte. Dieß zu ersparen, zerstreue man die 17 Groschen in (12 + 4 + 1) Groschen. 12 Groschen, unter den Namen des Thalers gebracht, ist $\frac{1}{2}$ Thaler. Man multiplicire also 814 durch $\frac{1}{2}$, bemerke das Specialproduct und heisse es A. Nun hat man noch zu multipliciren durch (4 + 1) Groschen und durch 9 Pfenninge. Man subordinire 4 Groschen unter den vorhergehenden Theil des Factors, nemlich unter 12 Groschen. Sie sind davon $\frac{1}{3}$. Anstatt also die 814 durch 4 Groschen zu multipliciren, darf ich sie durch 12 x $\frac{1}{3}$ Groschen multipliciren, das ist, ich soll 814 x 12 Groschen, durch $\frac{1}{3}$ multipliciren. Nun ist mir bekannt, was 814 x 12 Groschen in Thalern sey. Denn das war mein Specialproduct A. Wenn ich also A multiplicire durch $\frac{1}{3}$; so habe ich 814 x 12 Groschen, $\frac{1}{3}$ mal gesetzt, und also der Multiplication der 814 durch 4 Groschen, Gnüge gethan,

than, und dennoch habe ich dieß Specialproduct B schon in Thalern. Noch ist 814 zu multipliciren durch 1 Groschen 9 Pfenning. Ein Groschen ist $\frac{1}{4}$ von 4 Groschen. Multiplicirt man also das Product B durch $\frac{1}{4}$; so bekömmt man das Product C, und die Multiplication durch 1 Groschen ist geschehen. Noch sind 814 zu multipliciren durch 9 Pfenning. Diese sind $\frac{3}{4}$ von 1 Groschen, als von dem vorhergehenden Theile des Factors. Wenn also das Product C durch $\frac{3}{4}$ multiplicirt wird; so ist 814 durch 9 Pfenning multiplicirt. Und nun hätte ich alle Specialproducte und dürfte nur addiren. Aber die letzte relative Multiplication durch 9 Pfenning, läßt sich auch, und vielleicht bequemer, anders ausführen. Man denke nemlich 9 Pfenning zerstreut, als 6 + 3 Pfenning. 6 Pfenning ist $\frac{1}{2}$ von 1 Groschen, als dem vorhergehenden Theile des Factors. Daher multiplicire man das Product C durch $\frac{1}{2}$; so ist das Product D da. Und weil 3 Pfenning ein $\frac{1}{2}$ von 6 Pfenning, als von dem vorhergehenden Theile des Factors ist; so multiplicire man das Product D durch $\frac{1}{2}$; so hat man das letzte Product E, und die Multiplication ist geschehen, wenn man nur addirt. 2) Es geschicht oft, daß 2 Zahlen durch einander zu multipliciren sind, wovon eine jede, sowol grössere als kleinere Einheiten hat. z. E. Wenn man 17 ℔ 6 ℔ durch 50 ₰ 9 ß multipliciren soll. Dieses ist eben so viel, als wenn $17\frac{6}{14}$, oder $17\frac{3}{7}$ durch $50\frac{9}{18}$ zu multipliciren wäre. Solche Multiplication anzustellen, dürfen wir, wenn es die Bequemlichkeit fordert, 17 ℔ 6 ℔ als

17 L℔ + (2 + 2 + 2) Pfund denken. Und die 50 ℞ 9 ß sind so gut, als 50 ℞ (8 + 1) ß. Die so angestellte Multiplication, wird 8 Specialproducte geben. Man denke aber 2 ℔ als $\frac{1}{7}$ L℔, und also sind (2 + 2 + 2) Pfund so viel, als ($\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}$) L℔. Und die 8 + 1 Schilling sind $\frac{1}{2}$ ℞, nebst $\frac{1}{8}$ von dem vorigen Theile des Factors, uemlich von $\frac{1}{2}$ ℞. Die Specialproducte lassen sich also auf folgende Art ordnen. Ich setze aber voraus, daß sie den Namen von Lieſpfunden oder auch von Pfunden führen sollen.

1)	17×50	=	850 L℔	— ℔
2)	$17 \times \frac{1}{2}$	=	8 "	7 "
3)	$(17\frac{1}{2}) \times \frac{1}{8}$	=	1 "	$\frac{7}{8}$ "
4)	$\frac{1}{7} \times 50)$	=	7 "	2 "
5)	$\frac{1}{7} \times 50$	=	7 "	2 "
6)	$\frac{1}{7} \times 50$	=	7 "	2 "
7)	6 ℔ $\times \frac{1}{2}$	=	—	3 "
8)	(6 ℔ $\times \frac{1}{2}$) $\times \frac{1}{8}$	=	—	$\frac{3}{8}$

Summa 880 L℔ 16$\frac{10}{8}$ ℔ = 881 L℔ 3$\frac{1}{4}$ ℔

Es wird sich diese Multiplication noch besser aufklären in der Lehre von der Proportion. Hier muß ich nur noch sagen, daß es leicht Verwirrung verursache, wenn man durch die Theile beyder Factoren auf relative Art multiplicirt. In solchem Falle ist es besser, einen jeden Factor als eine unreine Integralzahl anzusehen, und einen jeden durch Einrichtung zu einem Bruche zu machen, und alsdann die Brüche zu multipliciren, z. E.

17 L℔

17 L℔ 6 ℔ ist $17\frac{3}{7}$ und 50 ℳ 9 ß ist $50\frac{9}{16}$. Richtet man nun diese Zahlen ein; so kommen dort $\frac{122}{7}$ und hier $\frac{809}{16}$. Diese machen multiplicirt durcheinander, und gehörig verkleinert, $881\frac{13}{56}$ L℔. Das ist gleichfalls 881 L℔ $3\frac{1}{4}$ ℔. Ich überlasse es abermals dem Urtheile der Lehrer, wie lange vor dem weitern Fortgange die Uebung des Zerstreuens und Ausnehmens in allerley Münzsorten, Maaß und Gewicht währen müsse.

Das Sechste Hauptstück.

Von Verhältnissen, Proportionen, und Progreßionen insgemein.

§ 66.

Es würde sehr vergebens seyn, wenn man in die Zahlenkunst weiter eindringen wollte, ohne sich durch zureichende Uebung in dem Vorigen die Kräfte dazu erworben zu haben.

Ist aber dieses geschehen, so ist alle Schwierigkeit für denjenigen überwunden, welcher Fähigkeit und Lust zum Denken genug hat, um nicht mit dem grossen Hauffen so rechnen zu wollen, wie der Knabe, der die Leyer drehet, regelmäßige Töne hervorbringt, ohne einmal die Maschine zu kennen, deren künstliche Einrichtung mehr dazu beyträgt, als der Knabe. Doch ich eile ohne Verzögerung zum Zweck. Ich nenne 2 paar Zahlen harmo-

harmonisch gesetzt, wenn entweder die erste der andern gleich ist, und die dritte der vierten; oder wenn in beyden Paaren die grössere, oder in beyden Paaren die kleinere voran steht, z. E. 7 und 4 als das eine Paar, und 9 und 3 als das andere Paar, sind harmonisch gesetzt. Wäre das erste Paar 4 und 7; und das andere 3 und 9; so würden sie auch noch harmonisch gesetzt seyn. Aber das erste Paar 4 und 7, und das zweyte Paar 9 und 3, würden unharmonisch gesetzt seyn.

Jedes Paar Zahlen hat unter einander eine Differenz, ob gleich die Differenz, wenn die beyden Zahlen gleich sind, ohne Grösse, und also eine Nulle ist.

Wenn ich in diesem Hauptstücke, von dem ersten und zweyten Paare Zahlen rede, so verstehe ich allemahl zwey harmonisch gesetzte Paare.

Wenn die Differenz des ersten Paares gleich ist, der Differenz des zweyten Paares; so sagt man, daß das erste Paar eben ein solches **arithmetisch Verhältniß** habe, als das zweyte Paar, oder daß beyde Paare, oder alle 4 Zahlen, in **arithmetischer Proportion** stehen. Man nennt die 4 Zahlen auch alsdann **Proportionalglieder**, z. E. Weil 9 — 5 = 12 — 8, so stehen 9 und 5 als das erste Paar, und 12 und 8 als das zweyte Paar, in arithmetischer Proportion. Sie sind Proportionalglieder. Sie würden auch noch solche Glieder seyn, wenn man ihre Ordnung folgendermassen umkehrte: 5, 9, 8, 12, oder 12, 8, 9, 5, oder 8, 12, 5, 9.

Wenn man anzeigen will, daß das arithmetische Verhältniß zweyer Paare gleich sey; so macht man

 zwischen

zwischen den Gliedern jedes Paares 3 Puncte, und **verbindet die Paare selbst durch das Zeichen der Gleichheit**, z. E. $6 \because 4 = 9 \because 7$ oder $A \because B = M \because N$. Man lese Sechs zu Vier, verhält sich arithmetisch, wie Neun zu Sieben. Viele gebrauchen anstatt der 3 Puncte auch das Zeichen Minus (—). Z. E. $3 - 8 = 5 - 10$.

Es geschicht oft, daß das zweyte und dritte arithmetische Glied, einerley Zahl ist, z. E. $9 \because 6 = 6 \because 3$. So auch $4 \because 7 = 7 \because 10$.

Jch nenne das zweyte und dritte Glied, wenn beyde einerley Zahl sind, zusammen ein **Doppelglied**. Man stelle sich eine Reihe von Zahlen vor, davon eine jede (ausser den beyden äussersten) ein Doppelglied ist, in Ansehung der beyden zur Linken und Rechten zunächststehenden Zahlen; so nennt man diese Reihe eine **arithmetische Progreßion**, und die Zahlen heissen **Progreßions-Glieder**, z. E. 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. Oder 1, 3, 5, 7, 9, u. s. w. Oder 60, 66, 72, 78, 84, 90, u. s. w.

Jn einer arithmetischen Proportion, ist die Summe der beyden äussersten Glieder, gleich der Summe der beyden mittelsten Glieder. Denn wenn die Zahlen proportional sind, und A, B, C, D, heissen; so herrscht zwischen beyden Paaren eben dieselbe Differenz, eben derselbe Unterschied, oder U. Jst nun $A = B$; so ist auch $C = D$. Denn es herrscht ja einerley Unterschied. Also muß $A + D$ gleich seyn $B + C$, denn ich dürfte B für A; und C für D setzen, z. E. $IV \because 4 = (3+1) \because \frac{12}{3}$. Also $IV + \frac{12}{3} = 4 + (3+1)$. Ein eilender Anfän-

Anfänger darf diesen und die beyden folgenden Paragraphen, deren Inhalt im alltäglichen Rechnen selten gebraucht wird, übergehen, oder mit einer nicht völlig aufgeklärten Erkenntniß zufrieden seyn, wenn er nur bey der §. 69. folgenden Lehre von der geometrischen Proportion seinen Fleiß verdoppelt.

Ist in beyden Paaren die erste Zahl die grössere, so ist $A-U=B$, und $C-U=D$. Also $A+D = (B+U)+(C-U)=B+C$. Daher unser Satz auch in diesem Falle wahr ist, z. E. $12 \therefore 8 = 9 \therefore 5$. Also $12+5=8+9$.

Ist die erste Zahl in beyden Paaren die kleinere; so ist $A+U)=B$, und $C+U=D$. Also $A+D = (B-U)+(C+U)=B+C$. z. E. $3 \therefore 7 = 9 \therefore 13$. Also $3+13=7+9$. Also ist unser Satz in allen Fällen wahr.

Von arithmetischen Progreßionsgliedern ist also jedes Glied die Hälfte von der Summe der beyden, zur Rechten und Linken nächststehenden, Glieder. Denn jedes Glied ist alsdann ein Doppelglied, und stellet die beyden mittelsten Glieder derjenigen arithmetischen Proportion vor, deren äusserste Glieder zur Linken und Rechten stehen. Man nenne ein solches Glied M, die beyden zunächststehenden aber L und N. Es ist $L+N=M+M$. Denn es ist eine arithmetische Proportion. Also ist $L+N=2M$. Also $\frac{L+N}{2} = M$. z. E. Es stehen in arithmetischer Progreßion 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, u. s. w. 6 ist die Hälfte von $3+9$. 15 ist die Hälfte von $12+18$. u. s. w.

Man setze der Progreßions-Glieder so viel oder so wenig man will, und denke ein Paar in der Progreßion vorwärts zunächst an einander stehende Glieder, und noch ein Paar solcher Glieder, die irgendwo weiter hinterwärts zunächst an einander stehen; so ist es gewiß, **daß zwischen diesen 4 Zahlen eine arithmetische Proportion herrscht.** Denn es ist einerley Unterschied zwischen jedem Paare dicht an einanderstehender Glieder, wenn sie aus eben derselben Progreßion sind, z. E. 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, sind eine Progreßion. Also 5 ∵ 10 = 35 ∵ 40. Und 10 ∵ 15 = 25 ∵ 30.

Man schreibe eine arithmetische Progreßion; man denke irgend ein Glied; alsdann übergehe man eine gewisse Zahl Glieder, und denke wieder ein ander Glied; man übergehe abermals dieselbe Zahl von Gliedern, und denke abermals ein Glied; man übergehe von neuem eben so viel Glieder, und denke das darauf folgende. Ich sage die Glieder, die man so heraus zieht, stehen gleichfalls unter einander in arithmetischer Progreßion. Denn es herrscht zwischen ihnen der zweyfache, dreyfache, oder gleichvielfache Unterschied, welcher in der ersten Progreßion herrschte. z. E. Es sey die Progreßion, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, u. s. w.; so stehen auch in Progreßion 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, u. s. w. Imgleichen 7, 13, 19, 25, 31, u. s. w. **Mit einem Worte, die aus einer Progreßion regelmäßig excerpirten Glieder, stehen gleichfalls unter einander in Progreßion.** Man

Man stelle sich Zahlen in Progreßion vor; man sey aufmerksam auf den herrschenden Unterschied; man denke die Hälfte, den dritten, den vierten, den fünften Theil dieses Unterschiedes u. s. w. Man setze zwischen den Gliedern der zuerst gedachten Progreßion, so viel Zwischen-Glieder, als erfordert werden, um den Unterschied der zunächst stehenden Glieder nur so groß zu machen, als man sich vorgenommen hatte. Man wird nicht zweifeln, daß aldann die neue Ordnung von Zahlen, welche durch diese Ausfüllung geworden ist, gleichfalls unter einander in Progreßion stehen. Auch wird man gewahr werden, daß man zwischen jedem Paare der alten Progreßion so viel Glieder, weniger Eins, zwischen gesetzt habe, als derjenige Divisor Einheiten hat, wodurch man die alte Differenz dividirte, um die neue kleinere zu finden. Nimmt man die Hälfte der alten Differenz; so setzt man zwischen jedem alten Paare nur ein Glied. Nimmt man den dritten Theil der alten Differenz; so setzt man zwischen jedem alten Paare nur zwey Glieder. Nähme man den zehnten Theil der alten Differenz; so würde man jedesmal nur 9 Glieder zwischen setzen, u. s. w. z. E. Wenn man diese Progreßion 1, 13, 25, 37, 49, 61, 73, 85, 97 ausfüllen wollte; so wären verschiedene Arten möglich. z. E. 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, 43, 49, 55, 61, u. s. w. bis 97; oder 1, 5, 9, 13, u. s. w. bis 97; oder, 1, 4, 7, 10, bis 97; oder 1, 3, 5, 7, 9, u. s. w. bis 97; oder 1, 2, 3, 4, 5, u. s. w. bis 97; oder 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, u. s. w.

u. s. w. bis 97; oder $1, 1\frac{1}{3}, 1\frac{2}{3}, 2, 2\frac{1}{3}, 2\frac{2}{3}, 3$, u. s. w. bis 97.

Die arithmetische Proportion und Progreßion, wird zwar im gemeinen Rechnen bisher wenig gebraucht; aber desto mehr in den Wissenschaften. Die Einsicht in dieselbe dient auch in manchen gemeinen Aufgaben, und befördert sehr die tiefsinnige Denkart in der Zahlenwissenschaft. Ich will also noch etwas mehr davon sagen; zuvor aber einige Sätze, Wörter und Zeichen von **Potenzen** und **Wurzeln** erklären.

§ 67.

Eine jede Zahl heißt die **erste Potenz**, oder die erste **Dignität** von ihr selbst. z. E. 4, ist die erste Potenz von 4; C ist die erste Potenz von C. Man multiplicire eine Zahl durch sich selbst, das Product heißt die **zweyte Potenz** derjenigen Zahl, die multiplicirt ist. Z. E. 4, ist die zweyte Potenz von 2; 9 aber von 3, und 16 von 4, so auch 100 von 10. Die Zahl, welche so multiplicirt ist, heißt in Vergleichung mit ihrer Potenz, die **Wurzel**. z. E. Betrachtet man 64 als die zweyte Potenz; so ist 8 die Wurzel.

Man multiplicire die zweyte Potenz durch die Wurzel; so kömmt die **dritte Potenz**. z. E. Weil 9 die zweyte Potenz von 3 ist; so wird 3 mal 9, oder 27, die dritte Potenz von der Zahl 3. Man multiplicire die dritte Potenz durch die Wurzel; so kömmt die **vierte Potenz**; und eben so ist es auch mit den höhern Dignitäten. z. E. Weil 8 die dritte Potenz von 2 ist; so wird 8 mal 2, oder 16,

16, ihre vierte Potenz. Die zweyte Potenz wird auch die **Quadratzahl**; die dritte Potenz aber wird die **Kubikzahl** der Wurzel genennet. Auch die höhern Dignitäten haben ihre besondern Namen. z. E. 16 ist die Quadratzahl von der Wurzel 4; aber ihre Kubikzahl ist 64.

Die Wurzeln haben ihren Namen von der Benennung der Potenz, für deren Wurzel sie angesehen werden. z. E. 3, ist die **vierte Wurzel** von der vierten Potenz 81, weil $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Also hat eine Quadratzahl ihre **Quadratwurzel**, und eine Kubikzahl ihre **Kubikwurzel**. Von 36 ist 6 die Quadratwurzel, von 1000 ist 10 die Kubikwurzel. Denn $10 \times 10 \times 10 = 1000$.

Eine Zahl, ihre erste Potenz, und ihre erste Wurzel, sind einander gleich.

Die Potenz einer Wurzel oder Zahl, wird dadurch gezeigt, wenn man die Wurzel schreibt, und über der Wurzel eine kleine Zahl macht, welche der **Exponent** heißt, und durch ihre Grösse anzeigt, die wievielste Potenz angedeutet werde. z. E. $4^1, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5$. Man lese: Die erste, die zweyte, die dritte, die vierte, die fünfte Potenz von 4. Was ist also 4^3? Nichts anders, als $4 \times 4 \times 4 = 64$.

Wenn man die Wurzel einer solchen Zahl, die als eine gewisse Potenz angesehen wird, andeuten will; so schreibt man die Zahl, setzt das **Wurzelzeichen** ($\sqrt{\ }$) davor, und zeigt oben an der Wurzel durch den Exponenten an, die wievielste Potenz die Zahl ist. z. E. $\sqrt[2]{16}$ ist nichts an-

ders, als 4. $\sqrt[4]{81} = 3$. Denn $3 \times 3 \times 3 \times 3$, oder $3^4 = 81$. Es ist von den Potenzen und Wurzeln sehr vieles zu sagen; aber das Meiste ist schwer, und muß in die fernern Theile der Rechenkunst verspart werden. Hier ist zu meinem Zwecke genung, wenn ich nur noch dieß Einzige hinzufüge, daß man eine gewisse Art von Division hat, durch welche man die verlangten Wurzeln der Zahlen zu finden weiß. Itzt wende ich mich wieder zur arithmetischen Progreßion.

§ 68.

Wenn man die Glieder einer arithmetischen Progreßion allesammt zu einander addirt, so kömmt eine solche Summe, welche gleich ist einem gewissen Producte. Dieses Product will ich beschreiben. Man zähle die Menge der Glieder in der Progreßion Sind z. E. 21 Glieder; so ist 21 diese Zahl, welche ich Z nenne, und welche als einer der Factoren das gesagte Product hervorbringt. Um den zweyten Factor zu beschreiben, muß ich vorher anzeigen, daß man zwischen zweyen Zahlen, sehr leicht das arithmetische Doppelglied, oder die mittelste arithmetische Proportionalzahl findet. Denn sie ist (§ 66.) die Hälfte der Summe von jenen beyden Zahlen.

Ich wollte sagen, wie groß S, oder die Summe aller Glieder derjenigen Progreßion sey, die so viel Glieder hat, als Z anzeigt. Diese Progreßion hat ja ein erstes und letztes Glied. Sucht zwischen diesen die mittelste Proportionalzahl, sie heisse m, und ist der zweyte Factor zu dem gesagten

sagten Producte. Oder es ist S = Z m, oder m Z. Ich sage, multipliciret die Zahl der Glieder durch die mittelste Proportionalzahl; so habt ihr die Summe aller Glieder der Progreßion. z. E. Es sey die Progreßion, 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59. Welche Zahl ist hier Z? Antwort, 12. Welche Zahl ist hier m? Antwort, $\frac{59+4}{2} = 31\frac{1}{2}$. Man multiplicire 12 durch $31\frac{1}{2}$; so hat man die verlangte Summe S, oder 378. Der Beweis dieses Satzes ist nicht schwer. Denn die Zahl der Glieder ist entweder ungrad oder grad. Ist sie ungrad; so steht die mittelste Proportionalzahl, die ihr gefunden habt, auch in der Mitte der Progreßion, sie hat zur Rechten und zur Linken gleichviel Nebenglieder, die auf der einen Seite mit eben der Differenz abnehmen, als sie auf der andern Seite zunehmen. z. E. In der Progreßion 1, 3, 5, 7, 9, ist 5 das mittlere Glied; auf der einen Seite ist 7 und 9 durch eben solchen Zusatz der herrschenden Differenz entstanden, als diejenige Abnahme beträgt, wodurch 1 oder 3, kleiner, als 5, sind. Wenn man also nur auf die Summe aller sieht; so darf man mit Recht jedes Glied der Proportion so groß ansehen, als das Mittelglied ist. Denn was man auf der einen Seite giebt, das nimmt man auf der andern Seite wieder. Daher, wenn die Zahl der Glieder ungrad ist, man die Summe mit Wahrheit für m Z ansieht. Z. E. $5+7+9+11+13 = 9+9+9+9+9. = 9 \times 5 = 45.$ Ist aber die Zahl der

Glieder grade; so stehen in der Mitte der Progreßion zwey Glieder, und ausser ihnen stehen gleichviel andere Glieder zur Rechten, als zur Linken da sind. z. E. In der Progreßion, 2, 4, 6, 8, 10, 12, sind 6 und 8 diese beyden mittelsten Glieder. Die Natur der Progreßion zeigt, daß die Summe zweyer Glieder, davon das eine eben so weit von der einen Gränze der Progreßion, als das andre von der andern Gränze der Progreßion entfernt ist, allemal gleich sey der Summe eines andern Paares von solchen Gliedern. Also ist die Summe der beyden Mittelglieder, so vielmal in der ganzen Progreßion enthalten, als Paare darinnen sind, das ist halb so so vielmal, als Glieder drinnen sind. Sind die beyden Mittelglieder $m + (m + d)$; so ist $S = (m + (m + d)) \frac{Z}{2}$. Es ist aber die Summe dieser beyden Mittelglieder eben so viel, als die Summe der beyden alleräussersten Glieder. Und diese Summe der äussersten Glieder, ist doppelt so viel, als ihr mittleres Proportionalglied, welches itzund p heissen mag. Daher ist $S = 2p \frac{Z}{2} = pZ$. z. E. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 7 \times 6 = 42$, weil 7 das mittlere Proportionalglied ist zwischen 2 und 12.

Also, wenn die mittlere Proportionalzahl p heißt, und die Zahl der Glieder Z genannt wird; so ist in allen Fällen die Summe, oder $S = pZ$.

Man heisse das allererste Glied E, das allerletzte Glied L. Weil $p = \frac{E + L}{2}$, und weil $S = pZ$; so

so ist auch $S = (\frac{E+L}{2}) Z$, oder $(E+L) \frac{Z}{2}$. Das ist so viel gesagt, als: Die ganze Summe ist, die durch die Zahl der Glieder multiplicirte halbe Summe des ersten und letzten Gliedes; oder, die durch die halbe Zahl der Glieder multiplicirte Summe dieser äussersten Glieder. z. E. Es sey die Progreßion 4, 7, 10, 13, a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, 46. Gesetzt, es sagte mir jemand, daß 15 Glieder da wären, er sagte mir auch das erste Glied 4, und das letzte 46; so wüßte ich das mittlere Proportionalgied $\frac{46+4}{2}$, oder 25. Ich wüßte auch die Zahl der Glieder, und würde also die ganze Summe aller Glieder leicht berechnen, wenn mir auch alle übrigen verschwiegen würden. Nemlich, die Summe ist, 25 x 15, oder 375.

Die Progreßion ist entweder zunehmend oder abnehmend, z. E. 3, 9, 15, 21, ist von zunehmender Ordnung. Hingegen 10, 8, 6, 4, 2, ist von abnehmender Ordnung.

In der zunehmenden Progreßion ist das letzte Glied gleich, derjenigen Summe, welche aus dem ersten Gliede und der so oftmals gesetzten Differenz entspringet, als die Zahl der Glieder weniger 1 beträgt. **In der abnehmenden Progreßion aber, ist das erste Glied** gleich einer solchen Summe des letzten Gliedes, nebst der eben so oft gesetzten Differenz. Ich will durch Buchstaben weniger zweydeutig reden. Es ist in zunehmender Progreßion $E + (Z - 1 \times D) = L$. Es bedeutet

tet hier D die herrschende Differenz. In abnehmender Progreßion aber ist $E = L + (Z - 1 \times D)$. Daher, wenn die Zahl der Glieder die Differenz und eins der äussersten Glieder bekannt sind; so läßt sich das andere äusserste Glied, und folglich die ganze Summe berechnen.

Fängt die Progreßion von 1 an, und ist die herrschende Differenz gleichfalls 1, wie in 1, 2, 3, 4, u. s. w. so ist $Z = L$, und $S = \frac{L+1}{2} \times Z = \frac{L^2 + L}{2}$. Daher ist die Summe von 1, 2, 3, 4, ... 100, so viel als $(\frac{100^2}{2}) + \frac{100}{2} = 5050$.

In der Progreßion 1, 3, 5, 7, (u. s. w.) ist $E = 1$, und $L = E + (Z - 1 \times D) = 1 + (Z - 1 \times 2) = 2Z - 1$. Nun ist S immer $= \frac{E+L}{2} \times Z$. Daher ist in diesem Falle $S = \frac{1 + (2Z - 1)}{2} \times Z = \frac{2Z}{2} \times Z = ZZ = Z^2$. Ich will es auch mit Worten sagen. Erstlich: **Wenn, in zunehmender Progreßion, das erste Glied 1, und die Differenz 1 ist; so findet man die Summe in derjenigen Zahl,** welche aus der Hälfte des Quadrats der Zahl der Glieder, und aus der Hälfte eben dieser Zahl besteht. Zweytens: **Ist aber das erste Glied 1, und die Differenz 2; so findet man die Summe in dem Quadrate der Zahl der Glieder,** z. E. Die Summe von dieser achtfältigen Progreßion 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ist 8^2, oder 8×8, oder 64.

Diese

Diese Wahrheiten, weil sie selten im gemeinen Leben gebraucht werden, mag ein Ungeübter, wenn die Einsicht ihm zu schwer seyn sollte, vors erste übergehen. Denn die geometrische Proportion, davon die Lehre jetzund folget, ist von weit grösserer Brauchbarkeit in den Geschäften des Lebens.

§ 69.

Es mögen A, B, C, D, vier Zahlen seyn, in ihrer Ordnung betrachtet, so daß A die erste, und D die vierte ist. Es müssen aber diese 4 Zahlen auch zwey harmonisch gesetzte Paare seyn. Steht im ersten Paare die grössere voran; so muß auch im andern Paare die grössere voran stehen.

Wenn nun A, dividirt durch B, eben ein so grosser Quotient ist, als C, dividirt durch D; so sagt man, daß A, B, C, D, geometrische Proportionalglieder sind, daß sie in geometrischer Proportion stehen; daß das erste Paar dasselbe geometrische Verhältniß habe, als das zweyte Paar. Solche 4 Zahlen sind z. E. 8, 4, 12, 6. Denn $\frac{8}{4} = \frac{12}{6}$.

Will man anzeigen, daß 4 Zahlen geometrische Proportionalzahlen sind; so verbindet man das erste und zweyte Glied durch 2 Puncte; so auch das dritte und vierte Glied; aber die Paare selbst verbindet man durch das Zeichen der Gleichheit, z. E. $8:4 = 12:6$. Man lese, Acht zu Vier, verhält sich geometrisch, wie Zwölf zu Sechs. So auch $A:B = C:D$.

Es geschieht oft, daß das zweyte und dritte Glied gleich sind, z. E. $3:9 = 9:27$.

Nun

Nun stelle man sich eine Reihe Zahlen vor, worinnen, ausser den beyden äussersten Gliedern, jedes eingeschlossene Glied, sich als ein solches Doppelglied, oder als eine solche **mittlere geometrische Proportionalzahl**, gegen die beyden, zur Linken und Rechten zunächststehenden Glieder verhalte, z. E. 1, 3, 9, 27, 81, 243, u. s. w. Alsdann sind solche Zahlen eine **geometrische Progeßion.**

Wenn ich künftig von Proportionen und Progeßionen und ihren Gliedern rede; so setze man in Gedanken allemal das Wort **geometrisch** hinzu, wenn ich nicht ausdrücklich das Wort **arithmetisch** brauche.

Der brauchbarste Lehrsatz der Rechenkunst ist folgender: **Das vierte Proportionalglied ist gleich dem Producte der beyden mittelsten, wenn dasselbe durch das erste Glied dividirt ist.** Ich sage, wenn $A : B = C : D$; so ist $D = \frac{BC}{A}$, z. E. weil $5 : 30 = 3 : 18$; so ist $30 \times 3 = 5 \times 18$. Dieser wichtige Satz muß nun erwiesen werden.

Man merke also, **daß das Product des ersten und letzten Gliedes, gleich sey dem Producte der beyden mittelsten Glieder.** Denn es herrscht zwischen beyden Paaren einerley Quotient. Derselbe heisse q. Es ist $\frac{A}{q} = B$, und $\frac{C}{q} = D$. Also ist $AD = Bq \times \frac{C}{q} = BC$. Z. E. Weil $12 : 6 = 14 : 7$; so ist $12 \times 7 = 6 \times 14$

Hieraus folgt nun offenbar, **daß das letzte Glied D gefunden werde**, wenn man die beyden mit-

mittelsten Glieder oder B und C, durch einander multiplicirt, und das Product durch A oder durch das erste Glied dividirt. Denn, wie eben erwiesen ward: so ist $AD = BC$. Folglich $\frac{AD}{A} = \frac{BC}{A}$ und daher $D = \frac{BC}{A}$. In dem vorigen Exempel ist $7 = \frac{6 \times 14}{12}$.

Und weil $AD = BC$; so ist, wenn B und C einerley Zahl wären, $AD = BB = CC$. Also findet man die mittlere Proportionalzahl durch Ausziehung der Quadratwurzel, aus dem Producte der beyden äussersten Glieder. Wenn diese nun 4 u. 16 sind; so ist das Mittelglied $\sqrt[2]{64}$, oder 8.

So bald man weiß, daß $\frac{G}{H} = \frac{L}{K}$, so weiß man auch, daß $G:H = L:K$. Denn dieses ist nur ein anderer Ausdruck derselben Sache.

Wenn uns bekannt ist, daß $GK = HL$; so ist uns auch bekannt, daß $G:H = L:K$. Denn wenn $GK = HL$; so ist $G = \frac{HL}{K}$. Und folglich $\frac{G}{H} = \frac{L}{K}$. Und alsdann ist Proportion.

Es verhält sich auch, das erste zum dritten Gliede, wie das zweyte zum vierten, z. E. Wenn $12:4 = 18:6$; so ist $12:18 = 4:6$. Denn die 4 Zahlen mögen wieder A, B, C, D, heissen; so ist $AD = BC$. Folglich $A = \frac{BC}{D}$. Daher $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ welches das Zeichen der Proportion ist.

Daher

Daher darf man das zweyte und dritte Glied unter einander versetzen; und, wenn wir die vierte Proportionalzahl D finden wollen; so hindert es uns schlechterdings nicht, wenn wir das zweyte Glied fürs dritte, und das dritte Glied fürs zweyte, ansehen. Will ich zu 4, 9, 7, die vierte Proportionalzahl finden; so kommt eben dieselbe, als wenn ich sie zu 4, 7, 9, suchte. Sie ist in beyden Fällen $15\frac{3}{4}$.

Man nennet die Regel, zu dreyen die vierte Proportionalzahl zu finden, die **Regel-Detri**, und sie ist der Grund der meisten Berechnungen.

Ich will von einigen Vortheilen in der Ausübung derselben gleich weitläuftiger reden, wenn ich nur noch gesagt habe, **daß, in einer Proportion, sich auch das zweyte zum ersten Gliede verhalte, wie das vierte zum dritten.** Denn, wenn $A:B=C:D$; und wenn folglich $AD=BC$; so ist $D=\frac{BC}{A}$; also $\frac{D}{C}=\frac{B}{A}$. Und daher $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$. Z. E. Weil $4:12=9:27$; so ist $12:4=27:9$.

Es ist zwar überhaupt von geometrischen Proportionen und Progreßionen noch viel zu sagen. Aber es gehört in die versparte Lehre von den Potenzen.

§ 70.

Wenn man die vierte Proportionalzahl sucht, oder die Regel-Detri ausübt; so hat man noch folgende Erkenntnisse von der Proportion vorauszusetzen.

Erstlich. Wenn zwey Zahlen alle beyde durch einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt werden;

werden; so pflege ich diese Veränderung durch folgende Worte auszudrücken: sie sind harmonisch, und zwar auf geometrische Art, verändert. Nun ist dieses eine allgemeine Regel: wenn entweder das erste Paar Glieder, oder das zweyte Paar Glieder, oder das erste und dritte Glied, oder das zweyte und vierte Glied, oder einige dieser Paare zugleich, harmonisch, auf geometrische Art, verändert werden; so wird dadurch die Proportion im geringsten nicht verändert. Z. E. Wenn $4:12 = 24:72$; so ist auch $(4 \times 6):(12 \times 6) = 24:72$. Und $4:12 = \frac{24}{3}:\frac{72}{3}$. Und $\frac{4}{2}:12 = \frac{24}{2}:72$. Und $4:(12 \times 7) = 24:(72 \times 7)$. Und $\frac{4 \times 6}{8}:\frac{12}{7} = \frac{24 \times 6}{8}:\frac{72}{7}$. Denn wofern das erste, oder das zweyte, oder beyde Paare harmonisch verändert werden; so bleibt der Quotient der neuen Zahlen eben derselbe, der er bey den alten Zahlen war, weil solche zwey Zahlen ein Dividendum und ein Divisor sind, welche, ohne Veränderung des Quotienten, harmonisch verändert werden, wie in der Lehre von den Brüchen erwiesen ist. Man möchte also nur noch fragen, warum denn das erste und dritte Glied, oder das zweyte und vierte Glied, eine harmonische Veränderung dulden, ohne daß dadurch die Proportion gestört werde? Allein es ist leicht zu erweisen. Denn, wofern die allerersten Proportionalzahlen A, B, C, D, heissen, und allerley harmonische Veränderungen an ihnen geschehen; so bleibt immer Proportion zwischen den neuen Gliedern, so lange nur, vermittelst der Multiplication der äussersten Glie-

der durch einander, ein eben solch Product erhalten wird, als die Multiplication der beyden mittelsten Glieder durch einander giebt. Wird nun A und C harmonisch multiplicirt, oder dividirt; so bekömmt das vorige Product AD eine eben solche Multiplication oder Division, als das vorige Product BC. Waren sie also vor dieser harmonischen Veränderung gleich; so bleiben sie es auch nach derselben. Und dieses würde auch Statt finden, wenn B und D harmonisch verändert wären.

Zweytens. Wenn also die vierte Proportionalzahl D unbekannt, oder ein X ist; so erleichtert man sich oftmals sehr die Mühe, diese Zahl D oder X durch die Regel-Detri zu finden, **wofern man Gelegenheit hat, entweder das erste und zweyte, oder das erste und dritte Glied durch eine harmonische Division**, (wodurch eins derselben zuweilen sogar in eine Einheit verwandelt wird,) **zu verkleinern**, z. E. Es sey die vierte Proportionalzahl zu suchen zu 6, 48, und 113. Man theile 6 und 48 harmonisch durch 6; so kommt dort 1, und hier 8. Durch 8 multiplicirt man die Zahl 113, leichter als durch 48. Und da man vorhin hätte 48 x 113 noch dividiren müssen durch 6, um D zu finden; so hat man jetzund nur 8 x 113 zu dividiren durch 1, das ist, man braucht der Division gar nicht. Und aus jener schwerern Rechnung und dieser leichteren folgt doch einerley Resultat, eben dasselbe D, oder eben dasselbe X, welches dadurch bekannt wird.

Doch, zuweilen gereicht es uns auch zu einiger Bequemlichkeit im Rechnen, **wenn wir das erste**

und

und dritte, oder das erste und zweyte Glied bey Anwendung der Regel-Detri zuvor harmonisch multipliciren. Dieses ist besonders in denen Fällen wahr, wo mit unreinen Zahlen umzugehen ist. Denn wenn wir eine solche unreine Zahl durch den Nenner des Bruchs, welcher dieselbe beschließt, multipliciren, so wird sie eine reine Integralzahl. Wir dürfen aber diese Multiplication anstellen, ohne unsre Arbeit in Suchung der vierten Proportionalzahl zu stöhren, woferne wir nur für eine harmonische Multiplication an dem andern harmonischen Gliede sorgen. Ich nenne diejenigen Glieder harmonisch, die ohne Aufhebung der Proportion harmonisch verändert werden dürfen. Es verhalten sich daher sowohl das erste und vierte Glied, als das zweyte und dritte Glied, keinesweges harmonisch. Wollte man eins dieser Paare harmonisch verändern; so würde die Proportion aufhören. Hingegen sind das erste und zweyte, das erste und dritte, das dritte und vierte, und das zweyte und vierte, solche Glieder, welche sich harmonisch gegen einander verhalten, und an welchen man also die harmonische Multiplication im Gebrauche der Regel-Detri ausüben darf, um die unreinen Zahlen in reine zu verwandeln, z. E. Es sey zu suchen die vierte Proportionalzahl zu $121\frac{1}{4}$, 543, und 1400. Man multiplicire die beyden ersten Glieder harmonisch durch 4; so kömmt an ihrer Statt 485 und 2172 Es ist also einerley, ob man zu $121\frac{1}{4}$, 543, und 1400; oder ob man zu 485, 2172, und 1400 die vierte Proportionalzahl sucht. Man dividire

das erste und letzte Glied harmonisch durch 5; so kommen 97, 2172, und 280. Man findet noch immer diejenige vierte Proportionalzahl, welche man finden wollte, wenn man mit diesen durch harmonische Veränderung entstandnen Zahlen nach der Regel-Detri umgeht, und diese vierte Proportionalzahl als $\frac{2172 \times 280}{97}$ ansieht.

Anmerkung.

In einigen Ausübungen wird die Regel-Detri auch erleichtert werden, wenn man einsieht, daß das Verhältniß zweyer Zahlen nicht geändert werde, durch beyderseitige proportionirliche Addition und Subtraction, das ist, durch einen solchen Zusatz zur ersten Zahl, und durch einen solchen Zusatz zur andern Zahl, welche sich zu einander wie die Zahlen selbst verhalten; oder durch einen solchen Abzug von der ersten Zahl, und durch einen solchen Abzug von der andern Zahl, deren Verhältniß dem Verhältniß der Zahlen selbst gleich ist. Ich sage, wenn $100:5=300:15$, so ist $105:5=315:15$, und so ist $95:5=285:15$. Und überhaupt, wenn man 4 Proportionalglieder hat; so wird man immer 4 neue Proportionalglieder bekommen, wenn man folgende Veränderungen vornimmt:

Erstlich. Wenn man zu dem ersten Gliede das zweyte, und zu dem dritten Gliede das vierte addirt, und die beyden andern unverändert läßt. Ich sage, wenn $a:b=c:d$; so ist $(a+b):b=(c+d):d$.

Zweytens. Wenn man vom ersten das zweyte, und vom dritten das vierte Glied subtrahirt, und die beyden andern nicht ändert. Ich sage, wenn $a:b=c:d$; so ist $(a-b):b=(c-d):d$.

Drittens. Wenn man zu dem andern das erste, und zu dem dritten das vierte Glied addirt, und die beyden andern unverändert läßt. Ich sage, wenn $a:b=c:d$; so ist $a:(b+a)=c:(d+c)$.

Vier-

Viertens. Wenn man von dem andern das erste, und von dem vierten das dritte subtrahirt. Ich sage, wenn $a:b=c:d$; so ist $a:(b-a)=c:(d-c)$.

Fünftens. Wenn man zu dem ersten das dritte, und zu dem zweyten das vierte Glied addirt. Ich sage, wenn $a:b=c:d$; so ist $(a+c):(b+d)=c:d$.

Sechstens. Wenn man von dem ersten das dritte, und von dem zweyten das vierte Glied subtrahirt. Ich sage, wenn $a:b=c:d$; so ist $(a-c):(b-d)=c:d$.

Siebendens. Wenn man zum dritten das erste, und zum vierten das zweyte Glied addirt. Ich sage, wenn $a:b=c:d$; so ist $a:b=(c+a):(d+b)$.

Achtens. Wenn man von dem dritten das erste, und von dem vierten das zweyte Glied subtrahirt. Ich sage, wenn $a:b=c:d$; so ist $a:b=(c-a)$ $(d-b)$.

Alle diese Sätze, und noch andere gleicher Art, gründen sich auf die begreifliche Wahrheit, daß das Verhältniß zweyer Zahlen nicht geändert werde durch proportionirten Zusatz oder Abzug an beyden Seiten, indem die gleichnamigen Theile zweyer Zahlen eben dasselbe Verhältniß unter einander haben, als die Zahlen selbst, und also die Zusetzung oder die Wegnehmung solcher gleichnamigen Theile an beyden Seiten, das Verhältniß der Zahlen nicht ändert.

§. 71.

Um den Platz der Zahlen zur Ausübung der Regel-Detri bequem einzurichten, pflegt man die drey bekannten Glieder durch ziemlich lange Striche von einander abzusondern, und z. E. so zu schreiben $72 - 115 - 48 - x$.

Die Ausübung wird ungefehr folgende Gestalt haben:

$(72) - 115 - (48) - x$
$(9) \quad 2 \quad (6)$
$3 \quad \overline{} \quad 2$
$3)\ 230$
$76\frac{2}{3}$

Ich setze voraus, daß ein Anfänger in diesen Operationen, besonders auch in solchen Exempeln zur Gnüge geübt werde, worinnen man die relative Multiplication, oder das Ausnehmen anwendet.

Weil ich noch nichts von der Anwendung der Regel Detri in benahmten Zahlen gesagt habe; so will ich nur ein Exempel von unbenahmten Zahlen nehmen. Es mögen die drey bekannten Glieder seyn, 12, $35\frac{1}{4}$, 296. Wollte man hier zur blossen Uebung (denn Bequemlichkeit hat man dabey in diesem Falle nicht) die relative Multiplication brauchen; so würde man etwa den Aufsatz und die Operation folgendermassen anstellen.

$(12) - (35\frac{1}{4}) - (296)$
$3 \quad 24 + 11\frac{1}{4} \quad 74$
$8 \mid \frac{1}{1} \quad 24$
$2 \mid \frac{1}{4} \quad 296$
$1 \mid \frac{1}{2} \quad 148$
$\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4} \quad 1776$
592
148
74
$18\frac{1}{2}$
$2608\frac{1}{2}$
$3)\ 869\frac{1}{2}$

Man

Man sieht, daß D, oder die vierte Proportionalzahl, eben dieselbe sey, welche man auch ohne so vieles Zerstreuen und Ausnehmen durch die gewöhnlichste Ausübung der Regel Detri, aus den bekannten dreyen Proportionalzahlen findet, z. E.

12 — 35¼ — 296

296
35
1480
888
74
10434
12) 869½

Das Siebende Hauptstück.

Anwendung des Vorigen zu den Berechnungen im bürgerlichen Leben.

§ 72.

Man muß die Zahlen oder Grössen, welche man vor sich hat, addiren; so oft der Zweck erfordert, daß wir ihre Summe wissen. Hieran wird niemand zweifeln. Aber es ist doch zuweilen für einen Anfänger schwer, einzusehen, wann dieses der Zweck erfordere. Man muß also die Lernenden in dieser Beurtheilung üben. z. E. Die Addition wäre alsdann offenbar zu brau-

brauchen, wenn die verschwiegene Summe hernach noch müßte durch Anwendung der Species, oder der Proportionalregeln berechnet werden, damit durch diese Berechnung die unbekannte Zahl, welche ich jedesmal U nennen will, bekannt werden mögte. Es sey die Frage, wie reich ein gewisser Mensch sey, von dem man weiß, daß er $\frac{2}{7}$ von den zusammengesetzten bekannten Reichthümern dreyer anderer Menschen habe Hier ist offenbar, daß man die bekannten Reichthümer addiren, und die gefundne Sume durch $\frac{2}{7}$ multipliciren, oder dem Bruche $\frac{2}{7}$ gemäß setzen muß, um U zu finden. Wären die bekannten Reichthümer 6000 und 2000 und 4000 Reichsthaler; so wäre, wenn U Reichsthaler bedeutete, $U = (6000 + 2000 + 4000) \times \frac{2}{7} = 8000$. Ich muß also die drey Zahlen gleich anfangs addiren; und die Summe durch $\frac{2}{7}$ multipliciren, oder diese Multiplication mit jeder einzelnen Zahl anstellen, und die Specialproducte durch Addition in ein allgemeines Product verwandeln.

Man weiß auch, daß man zwischen zweyen Zahlen die Subtraction anstellen müsse, so oft uns an ihrer verschwiegenen Differenz gelegen ist. Es ist aber uns daran gelegen, so oft diese Differenz noch ferner berechnet werden muß, ehe uns U bekannt wird. Man setze die Frage, wie alt jemand sey, wenn es bekannt ist, daß seine Geburth 5 Jahre später erfolgt sey, als die Thronbesteigung des itzigen Königes, der 29 Jahre regiert hätte. Hier ist sonder Zweifel $U = 29 - 5$; und also muß subtrahirt werden. Es mag eine

andere

andere Frage seyn, wie reich jemand sey, von dem man wüßte, er habe so viel Geld, daß, wenn er, von 100 Menschen weniger, als Tage im Jahre sind, einem jeden 50 Thaler schenkte, er nur den vierten Theil seines Reichthums verthun würde. Hier ist offenbar, daß die Differenz zwischen 365 und 100 noch weiter berechnet werden müsse, um die unbekannte Zahl U, zu finden. Denn an Thalern ist $U = \frac{(365-100) \times 50}{4}$. Also 13250 Reichsthaler.

Es muß multiplicirt werden, so oft eine bekannte Zahl einer andern gemäß zu setzen ist, und dieses verschwiegene Product entweder die unbekannte Zahl vorstellt, oder doch, um sie zu finden, durch weitere Berechnung verändert werden muß. Daher ist allemal die blosse Multiplication durch die ungleichbenahmte Comparationszahl anzuwenden, wenn die Verwandlung grösserer Einheiten in kleinere, oder solcher Zahlen, welche von jenen benahmt sind, in solche, welche von diesen benahmt werden, geschehen soll, und die gleichnahmige Comparationszahl 1 ist. (§ 63) Schocke werden in Stücke, Thaler in Groschen, Groschen in Pfenninge, Ballen in Ries, Ries in Bücher, Jahre in Monate, Monate in Tage, Tage in Stunden, Stunden in Minuten, Minuten in Secunden, Ellen in Quartire, Schiffpfunde in Liespfunde, Liespfunde in Pfunde, Pfunde in Marke, Marke in Unzen, Unzen in Loht, Loht in Quentlein, Marke in Karat, Karate in Grane, Grane in Gräne, vermittelst der blossen Multiplication, durch die ungleichnahmige Com-

parationszahl, verwandelt, und dieses ist wahr in allen Fällen, wenn die gleichnahmige Comparationszahl 1 ist. Denn die Division, welche durch 1 geschehen sollte, verändert das Product nicht.

Gesetzt, wir wüßten, es hätte jemand alle sein Vermögen aufgewandt durch einen Bau, welcher nebst einem Capitale von 20000 Thaler, noch die Bezahlung von 50 Arbeitern, täglich mit 6 Groschen in einer Zeit von 14 Monaten, gekostet hätte. Wir wüßten, alles wäre wieder durch Feuerschaden verlohren gegangen, aber er hätte kurz nachher doppelt so viel geerbt, als dieser Bau gekostet, er hätte überdem seit der Zeit, die nunmehro 5 Jahre beträgt, jedes Jahr 100 Thaler erspart. Die Frage ist, wie groß itzund sein Vermögen sey. Hier ist offenbar $U = 20000$ Thaler $+ 14 \times 30 \times 6 \times 50$ Groschen, wenn man alles dieses verdoppelt, und noch 500 Thaler dazu addirt. Oder das Vermögen ist 52000 Thaler. Hier sieht man, daß, nm U zu finden, eine vorgängige Multiplication nöthig war.

Man muß dividiren, wenn man das Product und einen Factor weiß, und den andern wissen will, folglich wenn man zu untersuchen hat, welcherley Theil von einer grössern Quantität, eine bekannte kleinere Quantität sey, oder wie vielmal man eine kleinere Quantität setzen müsse, um dadurch eine bekannte grössere Quantität zusammen zu setzen; oder wie groß diejenige Quantität sey, welche man, einer bekannten Zahl gemäß, oder so und so vielmal, setzen müsse, um alsdann et-

was zu denken, welches einer gewissen bekannten Zahl gleich ist. z. E. Habe ich 100 Thaler, und will wissen, wie viele Personen ich davon, eine jede mit 20 Groschen zu beschenken im Stande sey; so muß ich 100 Thaler durch 20 Groschen, das ist durch $\frac{5}{6}$, dividiren. Die Antwort, oder die Zahl U, wird seyn 720.

Will ich wissen, wie viel eine von kleinern Einheiten benahmte Zahl seyn würde, wenn man sie von grössern Einheiten benahmte, und ist die ungleichbenahmte Comparationszahl 1; so komme ich gleichfalls, vermittelst einer blossen Division, durch die gleichnahmige Comparationszahl zum Zwecke. Stücke werden, dividirt durch 60, zu Schock; Groschen, dividirt durch 24, werden zu Thalern, Lohte werden, dividirt durch 32, zu Pfunden, u. s. w. Denn die Multiplication durch 1, als die ungleichbenahmte Comparationszahl, läßt die Zahl unverändert.

Es ist auch überhaupt die Division anzuwenden, wenn der verschwiegene Quotient, durch weitere Berechnung erst die Zahl U offenbaret, welche man wissen will. z. E. Wenn man $\frac{2}{3}$ von einer Erbschaft haben soll, die selbst $\frac{1}{4}$ von einer andern bekannten Erbschaft, z. E. von 12000 Thalern ist; so versteht es sich, es sey $U = \frac{12000}{4} \times \frac{2}{3} = 2000$ Reichsthaler.

Aus einigen angeführten und unzähligen Exempeln erhellet, daß man bey arithmetischen Fragen, die aus der Betrachtung vieler bekannten Zahlen zugleich beantwortet werden müs-

sen,

sen, oft mehr als eine Species, oft alle vier, und eine jede mehr, als einmal, ausüben müsse.

Denn wie in der Lehre von der Proportion bewiesen ist; so muß man in Anwendung der Regel Detri, um die vierte Proportionalzahl zu finden, sowohl die Multiplication, als die Division gebrauchen.

Eben dieses muß geschehen (§ 63.) bey der Verwandlung einer benahmten Zahl, in eine solche, die von grösseren, oder von kleinern Einheiten benahmt ist, woferne unter den bekannten Comparationszahlen weder die eine, noch die andere 1 seyn sollte. 6 Hamburger Ellen sind 5 Brabander. Folglich sind 50 Hamburger Ellen $= \frac{50 \times 5}{6}$ Brabander. Und 50 Brabander Ellen sind $\frac{50 \times 6}{5}$ Hamburger. Zwar ist es nicht schwer, so bald man 2 Comparationszahlen hat, 2 neue zu machen, davon die Eine nur 1 ist. z.E. Eine Hamburger Elle ist $\frac{1 \times 5}{6}$ Brabander, das ist $\frac{5}{6}$. Eine Brabander ist $\frac{1 \times 6}{5}$ Hamburger, oder $\frac{6}{5}$, oder $1\frac{1}{5}$. Aber wenn die gewöhnlichen Comparationszahlen sich nicht auf 1 beziehen; so ist dieses ein Zeichen, daß man in solchen Berechnungen eben die Bequemlichkeit habe, bey dem Gebrauche der gewöhnlichen Comparationszahlen, als wenn man sich erst andre machen wollte, davon die eine in der Zahl 1 bestünde.

§ 73.

Eine jede Multiplication wird mit Recht angesehen, für ein Suchen der vierten Proportionalzahl, in einer solchen Proportion, deren erstes Glied 1 ist, und deren zwey mittelsten Glieder die beyden Factoren sind. Denn z. E. Wenn man zu 1, 4 und 5, die vierte Proportionalzahl sucht; so ist sie ja $\frac{4 \times 5}{1}$, das ist 4×5. Aber diese Anmerkung hat vors erste keinen weitern Nutzen, als diesen, daß man weiß, es sey auf der Tafel, oder auf dem Papiere, keine weitläuftige Anstalt zu einer Proportionalrechnung zu machen, wenn das erste Glied nur die Zahl 1 ist. Denn alsdann ist ja alles durch eine blosse Multiplication geschehen.

Eine jede Division, darf mit Recht angesehen werden, für ein Suchen des vierten Gliedes einer solchen Proportion, davon das zweyte oder dritte Glied, die Zahl 1 ist. z. E. Man suche zu 5, 1 und 15, oder zu 5, 15 und 1, die vierte Proportionalzahl. Sie ist $\frac{15 \times 1}{5}$, oder $\frac{15}{5}$. Aber auch diese Anmerkung dient vors erste zu nichts anders, als daß man die Weitläuftigkeit der Anstalt vermeide, wenn man voraus sieht, daß wegen der Beschaffenheit des einen Gliedes, die ganze Rechnung durch eine Division geschehen sey.

So bald man eine Zahl dadurch findet, daß man eine bekannte Zahl, durch irgend eine multiplicirt, und durch irgend eine dividirt; so hat

man Recht, dieses für eine Ausübung der Regel Detri, oder für eine Proportionalrechnung zu halten. Denn man darf sich den Divisor nur als das erste Glied, und die beyden Factoren als die Mittelglieder vorstellen. Daher ist die Namenänderung der benahmten Zahlen, weil man sie vermittelst der Multiplication, durch die ungleichbenahmte Comparationszahl und vermittelst der Division durch die gleichbenahmte, anstellt, allerdings eine Proportionalrechnung, eine Ausübung der Regel Detri. Denn man sucht diejenige Zahl, die jener anders benahmten am Inhalte gleich ist, auf dieselbe Art, wie man die vierte Proportionalzahl suchet.

Ich habe bisher nur gesagt, was zu thun sey, um die vierte Proportionalzahl, wenn sie unbekannt ist, zu finden. Ein Ungeübter mögte fragen, ob denn auch kein Mittel sey, sich die erste, oder die zweyte, oder die dritte, durch Rechnen bekannt zu machen. Ich antworte folgendes. Es ist dieses von jeder Proportionalzahl, eine sehr leichte Sache, doch mit der Bedingung, daß drey Glieder bekannt sind. Denn es ist in der Lehre von der Proportion bewiesen, und zum Theil in sich selbst klar, daß, wenn A, B, C, D, in Proportion stehen, die Ordnung der Glieder ohne Stöhrung der Proportion, auf folgende verschiedene Arten dürfe versetzt werden.

$$A:B=C:D$$
$$B:A=D:C$$
$$C:D=A:B$$
$$A:C=B:D$$
$$B:D=A:C$$

Mit

Mit einem Worte, die Versetzung läßt sich auf jede Art anstellen, wenn nur die beyden Producte, welche jedesmal durch die Multiplication der äussersten Glieder, und durch die Multiplication der Mittelglieder erwachsen, allezeit A D, und B C, oder B C, und A D, sind. Denn in solchem Falle bleiben ja die Zahlen, ungeachtet ihrer veränderten Ordnung, nach den erwiesenen Lehrsätzen, in Proportion stehen. Durch diese Versetzung aber, bringt man leicht jedes Glied, es mag das erste, das zweyte, oder das dritte seyn, in die Stelle des vierten Gliedes. Z. E. Es wäre euch A unbekannt; so denket $D:C = B:A$. Wäre euch B unbekannt; so denket, $C:D = A:B$. Wäre euch C unbekannt, so denket, $B:A = D:C$. Aber was bedarf man dieser Versetzung? Man weiß ja überhaupt, daß das Product der beyden äussersten Glieder gleich sey, dem Producte der beyden mittelsten. Da ich nun voraussetze, daß uns drey Glieder bekannt sind; so ist uns ja eins dieser beyden Producte bekannt, und ferner wissen wir auch, daß, wenn wir diejenige dritte bekannte Zahl, welche nicht zu jenem Producte gehört, durch die unbekannte multiplicirten, das Product, jenem bekannten Producte gleich wäre. Man nenne jenes bekannte Product P, das bekannte Glied des andern Products nenne man G, das unbekannte Glied, welches als zweyter Factor zu dem zweyten Product gehöret, nenne man U; so wissen wir, daß $P = GU$. Dividirt hier und dort durch G, so ist $\frac{P}{G} = U$. Also fin-

der

det man das unbekannte Glied, vermittelst der Division des bekannten Products, durch das eine gleichfalls bekannte Glied, z. E. Es sey U : 12 = 15 : 45. So ist $U = \frac{12 \times 15}{45}$. Es sey 6 : U = 81 : 283. So ist $U = \frac{6 \times 283}{81}$. Es sey 12 : 156 = U : 39. So ist $U = \frac{12 \times 39}{156}$.

§. 74.

Wenn wir diejenigen Grössen, welche in der Welt vorkommen, durch Zahlen ausdrücken, und mit einander vergleichen; so giebt es unzählige gleiche Verhältnisse unter denselben, unzählige Proportionen. Aber einige Proportionen sind ganz singulär, in keinen uns bekannten Regeln gegründet, und gemeiniglich auch nicht von Beständigkeit. z. E. Die Zahl der Kinder eines Menschen, verhält sich zuweilen, zu der Zahl von verschiedenen 1000 Thalern, die er besitzt, wie sich die Zahl seiner Brüder, gegen die Zahl seiner Jahre verhält. Dergleichen Proportionen heisse ich singulär. Es geschicht zwar zuweilen, daß wir dergleichen singuläre Proportionen berechnen müssen, weil sie uns zufälliger Weise bekannt werden, und uns zuweilen daran gelegen ist, die vierte Proportionalzahl zu wissen. Allein, es ist von solchen Proportionen nichts weiter zu sagen, als was schon gesagt ist. Denn wir gehen hier mit den Zahlen, als mit unbenahmten um, und haben keine andere Regeln zu beobachten. Wäre mir bekannt, daß sich die Zahl der Menschen in

Altona, zu der Zahl der Häuser daselbst verhielte, wie die Zahl, der von Alexander her verflossenen Jahre zu 600, und wäre mir eine dieser Zahlen unbekannt; so dürfte ich nur, um sie zu finden, mit den 3 bekannten, als mit dreyen unbenahmten Zahlen verfahren.

Ganz anders ist es mit den **gewöhnlichen Proportionen**, davon wir vornehmlich nur reden wollen. Es stehen aber alsdann vier Grössen in gewöhnlicher Proportion, wenn die Quantitäten, davon in dem ersten und in dem andern, wie auch in dem dritten und vierten Gliede die Rede ist, sich gewöhnlicher Weise, in ihrer Grösse oder Kleinheit nacheinander zu richten pflegen, und wenn entweder das erste und andre Glied, und das dritte und vierte Glied; oder das erste und dritte, und das zweyte und vierte, untereinander gleichartige Grössen sind.

Eine solche gewöhnliche und allgemeine Proportion findet Statt, wenn in dem ersten Gliede vom Preise, oder vielmehr von Bezahlung, im zweyten von der Maasse oder Quantität der dafür zu bekommenden Waaren und Arbeiten, im dritten Gliede abermals von Preisen, und im vierten wiederum von solchen Waaren und Arbeiten die Rede ist. Man spricht alsdann: **Wie eine Bezahlung zu solcher Quantität Waare und Arbeit sich verhält; so verhält sich eine kleinere oder grössere Bezahlung, zu einer kleinern oder grössern Quantität solcher Dinge.** Oder nach der erlaubten Versetzung der Glieder spricht man auch: **Wie Geldeswerth zu Geld, in ei-**

 nem

nem Falle; so dergleichen Geldeswerth zu Geld, in einem andern Falle. Oder: Wie Geld zu Geld; so Geldeswerth zu Geldeswerth. Oder umgekehrt: Wie Geldeswerth zu Geldeswerth; so Geld zu Geld. Warum stehen solche Dinge in ordentlicher Proportion? Darum, weil es die gewöhnlichen Zwecke der Menschen erfordert, für viel Geld viel Waare, und für wenig Geld wenig Waare zu geben, und oftmahls, dasjenige Verhältniß, welches zwischen der Zahl des Geldes, und der Zahl der Waare, in einem oder in einigen Fällen ist, auch in andern Fällen festzusetzen, wenn man über ähnliche Waaren Abrede nimmt.

§ 75.

Mich dünkt aber, daß in den gewöhnlichen Anweisungen zur Rechenkunst, die Proportion zu oft empfohlen werde, um die unbekannte Zahl zu finden. Daher man in solchen Fällen auch gezwungen ist, von einer verkehrten Regel Detri, das ist, von einer verkehrten Anwendung dieser Regel zu reden. Die Berechnung wird alsdann zwar richtig, die unbekannte Zahl wird gefunden, die auf den ersten Begrif von der Sache folgende Operation, ist zwar auch dieselbe, die sie seyn muß. Aber dem ohngeachtet ist der erste Begriff, welchen man den Anfängern davon macht, nicht so geschickt, sie zu überzeugen, oder Verwirrung zu verhüten, als der natürlichere Begriff seyn würde, welchen ich durch Exempel erklären will.

Es ist offenbar, daß die Grösse eines Stück Tuchs, vermittelst der Multiplication der Länge

durch

durch die Breite erkannt wird, weil ein jedes Stück Länge und Breite haben muß, und weil es offenbar ist, daß, wenn zwey Stücke gleiche Länge haben, das letzte aber zwey oder dreymal so breit ist, oder wenn dieses bey gleicher Breite zwey oder dreymal so lang seyn sollte, die Quantität des ersten Stückes, auch zwey oder drey mal in dem andern enthalten sey. Wenn mir bekannt ist, wie groß vermittelst dieser Multiplication ein Stück sey, und wenn man ein anders, das jenem gleich ist, aber entweder verschiedene Länge, oder verschiedene Breite hat, denken will, und wenn entwederdiese letzte Länge, oder die letzte Breite bekannt ist, und nach dem einen unbekannten Factor gefragt wird; so wird gemeiniglich gerathen, man solle folgendermassen denken: **Wie sich die dortige zu der hiesigen Länge verhält; so verhält sich die hiesige Breite zu der dortigen Breite.** Oder auch: **Wie sich die dortige Länge zu der hiesigen Breite verhält; so verhält sich die hiesige Länge zu der dortigen Breite.** Die Erfahrung zeigt, wie viel Verwirrung dieser Begriff der Jugend mache. Aber man gewöhne sie lieber zu denken, daß das Product LB dem Producte b u, oder in andern Fällen l u, gleich seyn müsse, woferne gleiche Stücke gedacht werden sollen. Wie leicht ist alsdann nicht U, oder die unbekannte Länge oder Breite, zu finden? Man hat ein bekanntes Product in der bekannten Länge und Breite; man hat einen bekannten Factor, zu dem Product, das jenem gleich seyn soll. Was ist zu thun? Man dividirt jenes Product durch diesen

Factor; so muß der zweyte Factor, welcher ein solches Product giebt, zum Vorschein kommen. Ist dieses nicht leicht zu begreiffen?

Es kommen mancherley Arten dieser Berechnung vor, in welchen man aus dem ersten Begriffe von den Sachen, ohne an Proportion zu denken, unmittelbar einsieht, daß man nichts anders zu thun habe, als zu einem bekannten Producte, und einem bekannten Factor, durch Division den zweyten Factor zu suchen. Ich will solche Exempel unmittelbare **Product-Rechnungen** nennen.

Man muß die Anfänger üben, einzusehen, in welchen Fällen diese unmittelbare Product-Rechnung zu brauchen sey.

Sie wird angewendet, erstlich, wenn man etwas, das einem andern gleich ist, denken soll, und bey jenem Dinge zwar die Maassen, durch deren Multiplication seine Grösse erkannt wird, als bekannte Zahlen anzusehen hat, aber von diesem leztern Dinge eine oder die andere Maasse nicht weiß. Dieses ist jedesmal so, wenn von **Dingen die Rede ist, deren Grösse man aus Länge und Breite, oder aus Länge und Höhe, oder aus Breite und Höhe, oder aus Breite und Dicke, oder aus Länge und Dicke,** deßwegen zu beurtheilen hat, weil das Uebrige, was etwa noch ausserdem, zur Bestimmung der Grösse erfordert würde, nicht in Betrachtung gezogen wird, und man nur so Etwas denken will, welches jenem gleichen Dinge, (bloß als lang und breit, bloß als breit und hoch, bloß als lang und dick, (und so weiter) betrachtet,) gleich ist. Man

müßte

müßte diese Rechnung z. E. brauchen, wenn man wissen wollte, wie viel Ellen Tuches von einer bekannten Breite erfordert würde, um einen Fußboden, dessen Länge und Breite uns bekannt wäre, zu belegen; oder, wenn man wissen wollte, wie breit ein solches Stück Tuches, welches man von einer gewissen Länge annimmt, seyn müßte.

Zweytens. Gesetzt, man will zu verschiedenen Zeiten, in welchen die Waaren theurer oder wohlfeiler geworden sind, die Quantität berechnen, die man itzt für einen gewissen Preis geben oder verlangen muß, ich sage für eben denjenigen Preis, für welchen in den vorigen Umständen so oder so viel Waare verkauft wurde: so ist offenbar, daß der Verkäufer für denselben Preis desto minder Waaren giebt, je theurer dieselben geworden, und daß er hingegen desto mehr Waaren für denselben Preis verkauft, je wohlfeiler sie inzwischen geworden sind. Er wird dafür sorgen, daß er aus einem Thaler Einkauf, im Verkaufen, eben so viel Geld habe, als er vorher daraus gehoben hat. Wie macht er dieses? Er wird seinen Zweck erreichen, wenn er das Product des Preises einer gewissen festgesetzten Quantität, welches vermittelst der Multiplication desselben, durch die für ein gewisses festgesetztes Geld abzuliefernde Quantität entspringt, in beyden Fällen gleich macht. Denn z. E. Wenn die Waare doppelt so theuer geworden, und wenn er nun zu demselben Preise, die vorige halbirte Quantität giebt; so löset er aus einem Thaler Einkauf eben so viel Geld im Verkauffen, als vorher. Wenn wir aber zwey Zahlen betrach-

ten, und in einem andern Falle, jene erste durch eine Zahl multipliciren, wodurch wir diese zweyte dividiren; so ist das Product jener alten Zahlen und dieser neuen Zahlen gleich, weil $A \times B = (A \times X) \times \frac{B}{X}$. So macht es der Becker, er giebt für einen Groschen halb so viel Brodt, wenn das Korn doppelt so theuer ist. Alsdann ist 1×3 ℔ $= (1 \times 2) \times \frac{3}{2} = (1 \times 2) \times 1\frac{1}{2}$. Ich bin hier mit Fleiß weitläuftiger gewesen, um zu zeigen, wie man durch vernünftiges Denken die Anfänger von den Mitteln belehren muß, die unbekannten Zahlen zu finden. Eine solche wiederholte Uebung würde den Knaben in den Rechenschulen mehr nützen und gefallen, als die unaufhörliche Wiederholung ähnlicher Operationen, deren Grund sie nicht einsehen; obgleich auch durch diese Arbeit, wenn sie mäßig getrieben wird, die nöthige Fertigkeit zunimmt. Ich will bey andern Exempeln ähnlicher Art, kürzer seyn, und das Urtheil über die erforderliche Weitläuftigkeit der Erklärung, den Lehrern überlassen.

Ein Fuhrmann ist für ein empfangenes Geld schuldig, 40 Sch℔ 30 Meilen weit zu verfahren; es werden ihm dafür billiger Weise nur 24 Sch℔ aufgelegt, wenn er sie 50 Meilen fahren soll. Warum? Weil $40 \times 30 = 24 \times 50$, und dieses eine Product-Rechnung wäre; daher die Zahl 24, wenn sie unbekannt ist, vermittelst der Division des Products 40×30, durch die Zahl 50 gefunden wird.

Gleich-

Eine kleinere Anzahl von gleichfleißigen Arbeitern verrichten in langer Zeit eben so viel, als eine grössere Anzahl in kürzerer Zeit. Ist das Product der Arbeiter und Tage in zweyen solchen Fällen gleich; so ist auch das beyderseitige Werk gleich. Solche Fragen gehören also zu den Product-Rechnungen.

So auch, wenige Personen verzehren in vielen Tagen eben so viel Proviant, als viele in wenigen. Man wird also die Product-Rechnung brauchen müssen, wenn die Frage ist, wie viel Tage die Anzahl A genung habe, an einem solchen Vorrathe, welcher für die Anzahl B auf so viel Tage, als C anzeiget, zureichet. Es wird seyn die unbekannte Zahl, oder $U = \frac{BC}{A}$.

Ein groß Capital auf wenig Monathe ohne Interesse zu leihen, wird bey Kaufleuten für einen solchen Dienst gehalten, der durch die Anleihe eines geringern Capitals auf eine längere Zeit bezahlt wird. Das Product des dortigen Capitals, welches durch die Zeit multiplicirt wird, muß gleich seyn dem Producte, das aus der Multiplication des andern Capitals und der andern Zeit entstehet.

Es sey zweyerley Leinewand von gleicher Güte, aber von ungleicher Breite. Der Käuffer, der das Geld schon ausgegeben hat, will hernach eine bekannte Anzahl Ellen von jener Art, nach Billigkeit gegen eine andere Anzahl Ellen von dieser Art, vertauschen. Wieviel Ellen darf er verlangen? Antwort. Die Stücke müssen gleich seyn, diese Grösse so groß als jene Grösse. Jene

erkannte man aber aus der Multiplication der Ellen durch die Breite. Man weiß auch die Breite von dem andern Stücke. Es ist also dieses eine Product-Rechnung.

Man hat von seinem Nachbar, für 100 ℔ Waare, Geld empfangen. Die Lieferung dieser Waare wird verhindert. Man hat aber eine andere ihm gefällige, wovon das ℔ theurer ist. Wie viel ℔ muß man für jenes Geld geben? Antwort. So viel, daß die Theurung, multiplicirt durchs Gewicht, in beyden Fällen gleich ist. Man hat also ein bekanntes Product, und einen bekannten Factor eines solchen Products, das jenem gleich seyn soll.

§ 76.

Ich kehre wieder zurück zu den eigentlichen Exempeln der Proportion. Wie wird der Lohn für Arbeit, oder die Arbeit, so man für einen gewissen Lohn verlangen darf, berechnet werden? Dieses steht zwar oft in der Willkühr der sich verabredenden Personen, aber wenn keine Abrede genommen ist; so will die Billigkeit, daß, wie sich in gewöhnlichen Fällen die Quantität des Lohns zur Quantität der Arbeit verhält, indem man sowohl diese als jene durch Zahlen ausdrückt, daß, sage ich, auch in diesem Falle, sich die Quantität des Lohns, zur Quantität der Arbeit eben so verhalte. Hiebey ist nur noch dieses zu erinnern, daß man die Grösse der Arbeit, bald nach dem Raume, oder der Zahl der Gegenstände, bald aber nach der Länge der Zeit, oder nach der Menge der Monate, Tage und Stunden berechnet.

Nun ist es Zeit, eine der wichtigsten Anmerkungen in der Rechenkunst zu machen. Man bedenke also erstlich, daß eine und dieselbe Quantität sich durch verschiedene Zahlen, wenn man sie bald so, bald anders benahmt, ausdrücken lasse. Z. E. Die Quantität von zwey Pfund wird durch die Zahl 2, wenn sie Pfund bedeutet; durch die Zahl 64, wenn sie Loth bedeutet; durch die Zahl $\frac{2}{7}$, wenn man von Lb redet, ausgedrückt. So auch 3 Mark = 24 Groschen = 48 Schillinge = 1 Thaler = $\frac{1}{2}$ Courant-Ducat.

Zweytens. **Die Proportion gründet sich auf die Gleichheit des Verhältnisses in dem ersten Paare und in dem zweyten Paare der Glieder.** Aber wenn man die Quantitäten des zweyten Paares bald so, bald anders, durch verschiedene Zahlen ausdrückt; so wird das Verhältniß dieses Paares bald so, bald anders. Wie findet da eine feststehende Gleichheit mit dem Verhältnisse des ersten Paares Statt? Wenn also ein Paar benahmt ist, so steht es nicht in unserer Willkühr, wie wir die Quantitäten des andern Paares benahmen wollen. **Sondern, wenn die beyden Benahmungen des ersten Paares gleich sind; so müssen auch die beyden Benahmungen des andern Paares gleich seyn, weil man nur unter dieser Bedingung voraussetzt, daß die vier Quantitäten, oder ihre respectiven Zahlen, Proportionalglieder sind.** z. E. Wenn man denkt, daß, wie sich zwey Gewichte verhalten, sich eben also zwey Bezahlungen verhalten müssen; so will man dadurch anzeigen, daß die Proportion nur

alsdann zwischen den Zahlen statt finde, wenn man die Gewichtszahlen untereinander von gleichen Gewichtseinheiten und die Geldzahlen untereinander von gleichen Geldeinheiten benahmt. Man setze folgenden Fall: Wie sich verhält 3 Sch℔ zu 2000 ℔; so verhält sich 580 Thlr. zu $4142\frac{6}{7}$ ₰; mit diesen Worten will man nur folgendes sagen: daß die Proportion statt finde zwischen solchen vier Zahlen, welche in dem ersten Paare gleiche Einheiten des Gewichtes, und in dem andern Paare gleiche Einheiten des Geldes anzeigen, und davon doch eine jede, wenn sie so benahmt ist, diejenige Quantität ausdrücket, welche sie nach der gesagten Proportion ausdrücken soll.

Weil aber in der Proportion sich das erste zum dritten Gliede verhält, wie das zweyte zum vierten; so setzt man bey gegebnen Proportional-Exempeln auch oft voraus, daß das erste dem dritten, und das zweyte dem vierten Gliede an der Benennung gleich seyn sollen.

Mit einem Worte, wenn man Grössen durch benahmte Zahlen ausdrückt, und vier solche Grössen in Proportion denkt; so stellt man sich entweder allemal, wenn gleich der Ausdruck anders ist, eine gleiche Benahmung des ersten und zweyten, und ebenfalls eine gleiche Benahmung des dritten und vierten Gliedes vor. Dieses heisse ich die **directe Proportion.** z. E. Wie vier Pfund zu acht Pfund, so drey Reichsthaler zu sechs Reichsthaler. Oder man stellet sich die gleiche Benahmung des ersten und dritten Gliedes vor, und folglich auch die gleiche Benahmnng des zweyten

und

und vierten Gliedes. Dieses heisse ich die indirecte Proportion. z. E. Wie 4 Pfund zu 3 Thaler; so 8 ℔ zu 6 Thaler. Die indirecte Proportion ist mehr in den Rechenschulen, die directe aber mehr bey den Mathematikern gebräuchlich. Beyde aber sind gleichgültig.

Ein Proportionalsatz besteht aus Worten, oder Zeichen, wodurch eine Proportion unter 4 Grössen angezeigt wird. Es kommen in einem Proportionalsatze Zahlen, und gemeiniglich auch Nahmen derselben vor. Sind nun in dem Satze diejenigen Glieder, welche es seyn sollen, schon gleichbenahmt, so nenne ich den Proportionalsatz formirt, z. E. 100 Thaler Capital, verhält sich zu 120 Thaler Capital, wie 15 Marklübsch Zinsen zu 18 Marklübsch Zinsen. Dieses ist ein formirter Proportionalsatz. Nicht formirt aber würde er seyn, wenn er so lautete: Wie 300 Mark Capital zu 120 Thaler Capital; so verhält sich 5 Thaler an Zinse zu 3 Dänischen Ducaten an Zinse.

Soll man also die vierte benahmte Proportionalzahl suchen, oder die Regel Detri anwenden; so muß man durch die Namenänderung (§. 63.) erst den unformirten Proportionalsatz in einen formirten verwandeln, welches (§. 73.) durch eine vorläuffige Anwendung der Regel Detri geschicht, z. E. Es sey der Satz oder die Aufgabe: Wie sich verhält 5 Schl℔ 3 L℔ zu 300 Thaler 12 Groschen; so verhalten sich 3 Centn. zu so oder so viel Sächsischen Gulden; als man gerne wissen will. Hier sind zwey Nahmenändrungen nöthig. Erstlich, das Gewicht in Schiffpfunden, und das Gewicht in Centnern, müs-

müssen gleichnahmig gemacht werden. Und eben dieses muß an dem Gelde geschehen, welches in dem einen Gliede durch Thaler und Groschen, in dem andern durch Sächsische Gulden ausgedrückt war. Sind diese Nahmenändrungen geschehen; so ist der Satz erst formirt. Die Wahl der Uebungen überlasse ich den Lehrern.

Bey der Anwendung der Regel Detri ist es gemeiniglich unsre Absicht, daß das vierte Glied, dessen Zahl wir suchen, auf gewisse, uns vorgeschriebene, oder in unsern Umständen gegründete, Art, benahmt sey. **In diesem Falle ist es nicht gleichgültig, welche Benennung** bey der Nahmenänderung der Glieder weggeschafft oder beybehalten werde, sondern, wenn der Nahme des vierten oder unbekannten Gliedes in der Aufgabe bestimmet ist; so muß diese Benennung beybehalten, und also auch demjenigen Gliede gegeben werden, welches mit dem unbekannten Gliede harmoniren soll. Es sey z. E. die Frage, wofür man die Hamburger Elle in Hamburgischem Gelde verkauffen könne, wenn 100 Brabander Ellen 110 Holländ. Gulden kosten, und wenn in dem Verkauf diese Proportion beobachtet werden soll. Hier ist der gegebene directe Proportionalsatz: Wie 100 Ellen Br. zu 1 Elle Hamb. so verhält sich 110 Gulden zu so vielem Hamb. Gelde, als wornach gefragt wird. Der indirecte Ausdruck aber würde so lauten: Wie sich verhält 100 Ellen Brab. zu 110 Gulden; so verhält sich 1 Elle Hamb. zu dem gesuchten Hamb. Gelde. In beyden Ausdrücken ist der Proportionalsatz unformirt. Man muß entweder die

Bra-

Brabander Maasse nach der Hamburgischen, oder diese nach jener benahmen. Da aber das vierte Glied, in Hamburgischem Gelde gedacht werden soll; so muß man entweder gleich Anfangs das Holländische darnach benahmen, oder woferne man die Berechnung des vierten Gliedes Anfangs im Holländischen Gelde anstellt, zuletzt den Nahmen des Resultats, oder des Facits in den Nahmen des Hamburgischen Geldes verwandeln. Die verschiedenen Arten der gleichgültigen Berechnungen würden also folgende seyn.

Erste Art. 6 Ellen Hamb. zu 5 Ellen Brab. wie 1 Elle Hamb. zu ($\frac{5}{6}$ Elle Br.) Ferner 100 Ell. Br., zu $\frac{5}{6}$ Elle Br. wie 110 Guld. zu ($\frac{11}{12}$ Guld.) Ferner, wie 1 Gulden zu $\frac{11}{12}$ Gulden, so 22 Schilling Lübsch zu ($20\frac{1}{6}$ Schill.) Lübsch. Es versteht sich, daß man in diesem, und allen folgenden Exempeln, das zweyte und dritte Glied verwechseln dürfe.

Zweyte Art. 5 Ellen Br. zu 6 Ellen Hamb. wie 100 Ellen Br. zu (120 Ellen Hamb.) Ferner 1 Gulden, zu 22 ß. wie 110 Gulden zu 2420 ß. Ferner, 120 Ellen Hamb. zu 2420 ß. wie 1 Elle Hamb. zu $20\frac{1}{6}$ ß.

§ 77.

Aber zuweilen weiß man keine Comparationszahlen, wodurch sich die zu verändernden Nahmen unmittelbar gleichförmig machen liessen. Dieses würde z. E. Statt finden, wenn wir kein Verhältniß der Hamburger Elle zur Brabander wüßten, sondern wenn uns nur das Verhältniß der Leipz. Maasse gegen beyde bekannt wäre. Wenn in diesen

Umständen, Hamb. Maasse in Brabander Maasse, oder diese in jene zu verwandeln wäre; so müßte man eine derselben zuerst nach der Leipziger Maasse benahmen, und alsdann mit dieser Leipziger Maasse die noch nöthige Nahmenänderung vornehmen. Die Wahl der Exempel oder der Ausübung überlasse ich den Lehrern.

Ja, es geschicht zuweilen, daß, um die Nahmenänderung einer Quantität vorzunehmen, nicht bloß eine, sondern zwey, drey und mehr zwischengesetzte Nahmenänderungen geschehen müssen, um zum Zwecke zu kommen. So wäre es z. E. wenn wir Leipziger Geld nach Sterlingen benahmen sollten, und uns doch keine Art des Geldes unmittelbar bekannt wäre, welches ein uns bekanntes Verhältniß sowohl zu dem Leipziger als Sterlings-Gelde hätte. Wir würden aber doch endlich zum Zwecke kommen, wenn wir nur Comparationszahlen wüßten, erstlich für das Leipziger Geld und Hamburgisch Courant, zweytens für Hamburgisch Courant und Hamburger Banco; drittens für Hamburger Banco und holländische Gulden; viertens für holländische Gulden und für Sterlingsgeld. Denn wir dürften in solchem Falle das Leipziger Capital nach Hamb. Courant, dieses wieder nach Hamb. Banco, dieses abermals nach holl. Gulden, und dieses endlich nach Sterlingsgelde benahmen; so hätten wir anstatt des Leipziger Geldes allemal etwas Gleiches, anstatt dessen abermals etwas Gleiches, und ferner wiederum etwas Gleiches, u. s. w. gesetzt; und wir

wären

wären doch endlich zu Sterlingsgelde, oder zur verlangten Namenänderung gekommen.

Hiebey wird ein jeder einsehen, daß es unmöglich wäre, eine benahmte Zahl in eine andere, welche anders benahmt ist, und doch gleichviel bedeutet, zu verwandeln, wenn man nicht Comparations-Sätze hätte, die von der einen Benennung durch mehr oder weniger Tritte zur andern führten. Ich nenne **Comparations-Sätze** solche, worinnen Comparationszahlen festgesetzt werden, oder worinnen gesagt wird, daß eine gewisse so benahmte Zahl an Quantität entweder überhaupt, oder doch in diesem Geschäfte für gleich zu achten sey einer andern verschiedenen Zahl, die anders benahmt ist. **Eine Kette von Comparations-Sätzen** heisse ich eine Sammlung vieler solcher Sätze, welche so geordnet sind, daß der Nachbegriff des vorhergehenden Satzes, und der Vorbegriff des nächstfolgenden Satzes immer einerley Benennung haben. Eine solche Kette ist z. E. folgende: 2 Species Ducaten sind 5 Reichsthaler Lübisch. Ein Reichsthaler Lübsch ist 48 ß. 22 ß sind 1 Gulden holländisch. 30 Gulden holländsch sind 22 Zweydrittelstück. 3 Zweydrittelstücke sind 2 Thaler im Reiche. Ich nenne **die Kette zureichend**, wenn das erste Glied des ersten Satzes eine gleiche Benennung mit derjenigen benahmten Zahl hat, mit der man eine Namenänderung vornehmen soll; und wenn das letzte Glied des letzten Satzes diejenige Benennung hat, in welche man jene verwandeln will. z. E. Die beschriebene Kette wäre zureichend, wenn Species-Ducaten, der Benen-

nung

nung nach, in eine Zahl von Thalern zu verwandeln wären. Ich habe nur ein Exempel geben wollen. Denn in der That lassen sich, nach der Erkenntniß der meisten, die Species-Ducaten weit leichter und kürzer mit Reichsgelde vergleichen.

Nunmehro wird es ein verständlicher Grundsatz seyn, **daß man eine verlangte Namenänderung vergeblich versuche**, so lange man keine zureichende Kette von Comparations-Sätzen zu finden weiß.

Hat man aber diese Kette; so ist es nöthig, **die Namenänderung durch alle ihre Stufen durchzuführen, bis man an diejenige gekommen ist, welche der Zweck war.**

§. 78.

Wenn jemand in Anwendung der vier Species und in dem Begriffe von der Proportion und von der Productrechnung eine Fertigkeit hat; so besitzt er alle allgemeine Fertigkeit des Rechnens, und bedarf fast nichts weiter, (um in besondern Fällen die unbekannten erfindlichen Zahlen aus den bekannten würklich zu finden,) als daß er erstlich die nöthigen Comparationszahlen wisse, zweytens die Nahmen der benahmten Zahlen verstehe, damit er endlich drittens nicht zweifeln dürfe, wornach in dieser und jener arithmetischen Aufgabe gefragt werde.

Ich halte es daher nicht für rathsam, in den Rechenschulen diejenigen Schüler, welche die gesagte allgemeine Einsicht und Fertigkeit besitzen, mit

mit Exempeln der Rechnung von allerley Waaren, von Thara, von Interesse auf Interesse, von Rabatt, von der Reduction der Terminen, von dem Umwechseln der Geldsorten, von den Wechselbriefen, von der Gewinn- und Verlustrechnung, von dem Baratt, von der Theilrechnung, von der Compagniehandlung, von der Haverey, von der Commißion, von der Eigenhandlung, und andern von dieser Art, noch viele Jahre aufzuhalten. Denn sobald man ihnen erklärt, von welchen Geschäften die Rede sey, was die Nahmen und Kunstwörter bedeuten, und nach welcher Zahl man in solchen Geschäften zu fragen pflege; so sind sie ausser Zweifel im Stande, die Berechnungen würklich anzustellen. Und der ganze Unterricht davon sollte also in den gesagten Erklärungen, und in dem Nachfragen bestehen, wie sie dieselben verstanden haben. Doch ist es nicht ganz überflüßig, dieses Nachfragen auch darauf einzurichten, daß sie sagen müßten, welche Species oder arithmetische Operationen sie anwenden wollten, wenn ihnen diese und jene Aufgaben vorgelegt würden. Hierbey hätte der Lehrer Gelegenheit, die mangelhafte Einsicht durch die seinige zu ergänzen. Und dieses würde geschicktere Arithmethiker machen, als das unaufhörliche Exempel-Rechnen. Ich will daher die Erklärung einiger Kunstwörter, Namen und arithmetischer Fragen, nebst der allgemeinen Anweisung, wie die Antwort auszurechnen sey, zu dem Bisher gesagten hinzusetzen.

Bey Gold- und Silber-Rechnung muß man einen doppelten Verstand des Wortes **Mark** unterschei-

terscheiden. Es bedeutet das Wort Mark, (so auch Loth,) gemeiniglich ein bloß Gewicht, ohne auf die Güte der Materie zu sehen, welche gewogen wird. In diesem Verstande sagt man: **Dieses Stück gut oder schlecht Silber wiegt so viel Mark, so viel Loht.** Aber das Wort, die **Markfein**, bedeutet ganz was anders, nemlich sechszehn Loht rein Gold oder rein Silber, ohne Vermischung mit schlechtern Metallen. Daher, wenn die Markfein zu gewissem Preise bedungen ist, derjenige, der 20 Loht Silber abliefert, dennoch nicht für eine Markfein die Bezahlung erhält, wenn sein Silber schlecht, und in dem besagten Gewichte nicht einmal 16 Loht rein Silber wären. Die Frage: **Wie viel ist die Mark dieses Silbers ins Feine?** bedeutet also so viel, als: Wie viel fein Silber ist in 16 Loht. Denn es ist oft nur 14, nur 12, nur 10 Loht darinnen. Und alsdann heißt diese Masse Silbers, 14, 12, oder 10 **Löhtig**, wenn auch von einem Stücke, das 6 Pfund wiegt, die Rede wäre. Wenn nun jemand Silber von verschiedener Feinheit zusammen schmelzt, und die Feinheit eines jeden Stückes vorher kennt; **so berechnet er leicht die Feinheit des vermischten Stückes.** Denn er weiß das ganze Gewicht seiner neuen Masse durch die Addition. Er erfährt leicht, **wie viel fein Silber vor der Vermischung in jedem Stücke war**, er schließt nemlich so: Wie sich verhält eine Mark zu dem Gewichte des Stückes; so verhält sich die Menge der Lohte von feinem Silber, welche in einer Mark sind, zu der Menge der Lohte,

welche

welche sich in dem ganzeu Stücke an feinem Silber befinden. Oder er macht ein Product aus dem Gewichte und aus der Feinheit oder Löhtigkeit. z. E. 4 Mark 14 löhtiges Silber, enthält 4 x 14, oder 56 Loht fein Silber. Wird nun das feine Silber, was in jedem Stücke war, zusammen addirt; so weiß man alles dasjenige, welches in dem zusammengeschmolzenen Stücke ist. Also ist sowohl das Gewicht der zusammengeschmolzenen Masse, als des darinnen enthaltenen feinen Silbers bekannt. Nun aber verhält sich dieses ganze Gewicht zu einer Mark, wie die Quantität alles darinnen enthaltenen feinen Silbers zu derjenigen Quantität desselben, welche in einer Mark enthalten ist. Und eben diese letzte Quantität, wenn sie von Lohten benahmt wird, ist die Löhtigkeit der zusammengeschmolzenen Masse. Die Rechnung würde eben so beschaffen seyn, wenn von Gold oder andern Metallen die Rede seyn sollte.

Wäre aber aus zweyen Stücken Silbers von verschiedener Feinheit etwas zusammen zu schmelzen, welches eine solche verlangte Feinheit hätte, die grösser wäre, als die Feinheit des schlechten Silbers, und kleiner, als die Feinheit des besten Silbers; und würde alsdann gefragt, wie sich die Quantitäten, welche man von dem besten und von dem schlechtsten Silber zu nehmen hätte, gegen einander verhalten müßten; so müßte man die ganze Quantität, die man durch Umschmelzen zusammen bringen wollte, multipliciren durch die Differenz der höchsten und mit-

telsten Feinheit, und dieses Product dividiren, durch die Differenz der höchsten und niedrigsten Feinheit. Alsdann würde man in diesem Resultate die Quantität des schlechtern Silbers haben, die man nehmen müßte. Und die Differenz, welche zwischen der ganzen Quantität, und dieser gefundnen Quantität des schlechtern ist, muß ohne Zweifel die hinzuzusetzende Quantität des bessern seyn. Denn man nenne die ganze Quantität q; es sey h die höchste, m die mittelste, n die niedrigste Feinheit; es sey ferner b die gesuchte Quantität des besten, und s die gesuchte Quantität des schlechten. Alsdann ist bekannt, daß $b + s = q$, und daß $bh + sn = qm$. Aus der ersten Gleichung folgt, daß $b = q - s$. Wodurch die zweyte Gleichung sich in folgende Gleichung verwandeln läßt: $(qh - sh) + sn = qm$. Man subtrahire von beyden Gliedern qh; so sieht man, daß $s(n - h) = q(m - h)$. Weil h, sowohl m als n, an Grösse übertrifft; so ist die Differenz in beyden Gliedern negativ. Verwandelt man sie nun beyderseits durch Versetzung der Hauptsumme und der Abzüge in positive Differenzen; so müssen dieselben untereinander eben sowohl gleich seyn, als es die negativen waren. Es ist also $s(h - n) = q(h - m)$. Daher, wenn man beydes durch $(h - n)$ dividirt; so wird klar, daß $s = q\frac{(h - m)}{h - n}$. Dieses war es, was ich erweisen wollte, z. E. Wenn aus 14 und 10 Löthigem Silber eine Quantität von 3 ℔ zusammen zu schmelzen wäre, welche 13 Löthig seyn sollte; so müßte man von dem schlech-

schlechtern nehmen, $\frac{3 \times 14 - 13}{14 - 10} = \frac{3 \times 1}{4} = \frac{3}{4}$. Und also $2\frac{1}{4}$ ℔ von dem besten. Und alsdann würde die neue Masse 13=löhtig seyn. Denn man sieht alsdann, daß in $\frac{3}{4}$ ℔ von dem schlechten, 15 Loht fein Silber; und daß in $2\frac{1}{4}$ ℔ von dem besten Silber 63 Loht fein Silber enthalten sey. Also sind in der ganzen Masse von 3 ℔, zusammen 78 Loth fein Silber. Das ist eben so viel gesagt, als daß die Masse 13 löthig sey. Denn 3 ℔ oder 6 Mark verhält sich zu 78 wie eine Mark zu 13. Sollte aber die Zusammenschmelzung, und zwar so, daß die neue Masse eine gewisse Feinheit hätte, aus 3, 4, und mehr Stücken von verschiedener Feinheit geschehen; so wird man oftmahls die Wahl haben, ob man von dieser und jener Sorte mehr oder weniger nehmen wolle, wenn man nur nach der einmal getroffenen Wahl auch das Uebrige einrichtet. Man findet alsdann irgend eine mögliche Wahl auf folgende Art. Erstlich. Man stellet sich aus der Sorte a und b willkührlich irgend eine zusammengeschmolzene Masse vor, deren Feinheit man berechnet, und welche Feinheit noch nicht so groß seyn muß, als die Feinheit, welche man durch die Zusammenschmelzung der Sorten a, b und c, wovon c die feinste ist, verursachen will. Zweytens. Man bemerkt, wie sich die willkührlich gewählte Quantität von a, gegen die daraus folgende Quantität von b verhalte. Drittens. Man sieht also die vermischte Quantität von a und b, entweder als $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, oder als $\frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$, oder als $\frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b$ an. u.s.w.

Viertens. Alsdann berechnet man, wie groß die aus a und b vermischte Quantität, und die Quantität von der Sorte c seyn müsse, um ein Stück Silbers von dem vorgeschriebenen Gewichte und von vorgeschriebener Feinheit zusammen zu schmelzen. Weiß man auf solche Weise die aus a und b vermischte erforderliche Quantität; so weiß man auch nach dem vorhin gewählten Verhältnisse, welcher Theil von der vermischten Quantität insonderheit müsse aus der Sorte a und aus der Sorte b genommen werden, z. E. Wer 10 und 11, und 15-löthiges Silber in Vorrath hat, und 13-löthiges, 4 ℔ schwer, liefern soll, der dürfte folgendermaassen rechnen: Wenn ich von dem 10- und 11-löthigen gleichviel nehme; so bekomme ich $10\frac{1}{2}$-löthiges, welches aus der vorigen Demonstration erhellet. Wieviel $10\frac{1}{2}$-löthiges, wieviel 15-löthiges müßte ich nehmen, um 4 ℔ von 13-löthigen zu liefern? Antwort. Von jenem $\frac{4 ℔ \times 15 - 13}{15 - 10\frac{1}{2}}$, oder $\frac{8 ℔}{4\frac{1}{4}}$, oder $8 ℔ : \frac{9}{2}$, oder $\frac{16}{9}$ ℔, oder $1\frac{7}{9}$ ℔. Also muß ich von dem 15-löthigen nehmen $2\frac{2}{9}$ ℔. Aber wieviel insonderheit von dem 10-löthigen, und insonderheit von dem 11-löthigen? Antwort. Weil von jedem gleichviel, und zusammen $1\frac{7}{9}$ ℔ seyn soll; so muß ich von jeder Sorte die Hälfte von $1\frac{7}{9}$ ℔ nehmen, das ist $\frac{8}{9}$ ℔, so ist die Frage aufgelöst. Denn $2 \times \frac{8}{9} + 2\frac{2}{9}$ macht 4 ℔. Und $\frac{8}{9}$ ℔ oder $\frac{16}{9}$ Mark 10-löthiges Silber enthält $\frac{160}{9}$ Loth, oder $17\frac{7}{9}$ Loth fein Silber. Und $\frac{8}{9}$ ℔, oder $\frac{16}{9}$ Mark 11 löhtiges

Sil-

Silber, enthält $19\frac{5}{9}$ Loht fein Silber. Und $2\frac{2}{9}$ ℔, oder $4\frac{4}{9}$ Mark, 15 löhtiges Silber, enthält $66\frac{6}{9}$ Loht fein Silber. Also sind alsdann in der zusammengeschmolzenen Masse von 4 ℔, oder von 8 Mark, zusammen 104 Loht fein Silber, welches die Eigenschaft vom 13 löhtigen Silber ist.

§ 79.

Thara ist der Abzug vom Gewicht, welcher wegen der Schwere des Gefässes, von dem Gewichte der in demselben gewogenen Waare, dem Käufer zugestanden wird. Ehe der Abzug geschehen ist, heißt das Gewicht **Brutto**; der Rest desselben nach dem Abzuge, heißt **Netto**, und die Differenz des Brutto und Netto ist die jedesmalige **absolute Grösse der Thara**. Hingegen das geometrische Verhältniß der Thara zum Brutto, oder der Quotient bey der Division der Thara durch das Brutto, ist **die relative Grösse der Thara**. Daher ist diese relative Grösse, wenn von 10 ℔, 1 ℔ Thara gegeben wird, allerdings grösser, als wenn von 50 ℔ die Thara 4 ℔ wäre. Denn obgleich jene absolute Thara, nemlich 1 ℔, kleiner ist als 4 ℔, so ist doch $\frac{1}{10}$ grösser als $\frac{4}{50}$, oder als $\frac{2}{25}$.

Wenn im Handel von dieser relativen Thara geredet wird, z. E. daß man von so oder so viel Brutto, so oder so viel Thara zugestehe, so leiden die Worte eine doppelte Bedeutung, nemlich die einschliessende und die ausschliessende. Es mögen z. E. die Worte seyn, daß man für jede 25 ℔ ein ℔ Thara verabrede. Alsdann ist die einschliessende Bedeutung diese, daß in 25 ℔ jedesmal 1 ℔

Thara enthalten seyn soll, und also 25 ℔ Brutto für 24 ℔ Netto anzusehen sind. Die ausschliessende Bedeutung aber wäre, wenn man jene Worte so verstünde, daß jedesmal das 26ste ℔ nichts gelten soll, und als eine Thara anzusehen ist; in welcher Bedeutung 26 ℔ Brutto für 25 ℔ Netto gerechnet würden. Die einschliessende Bedeutung ist in diesem Handel die gewöhnlichste. Und wo dieselbige gilt, da bedeuten die Worte 5 Procent, 4 Procent, 3 Procent Thara, dieses, daß 100 ℔ Brutto für 95, 96, oder 97 ℔ Netto, sollen gerechnet werden.

Man muß also in der Thara-Rechnung die verabredeten Comparationszahlen zwischen Brutto und Netto wohl merken. Denn hat man diese; so wird die Nahmenänderung zwischen Brutto und Netto sehr leicht auf gewöhnliche Weise durch **Multiplication und Division dessen vorgenommen, welches einen veränderten Nahmen bekommen soll**, z. E. Wenn in einschliessender Bedeutung 2 Procent Thara verabredet sind, und man also 100 ℔ Brutto als 98 ℔ Netto anzusehen hat; so sind 450 ℔ Brutto für $\frac{450 \times 98}{100}$, oder für 441 ℔ Netto zu halten. Und wenn man **die Thara von dem ganzen Gewichte besonders** wissen will; so setzt man nur: Wie sich verhält die Comparationszahl des Brutto zu dem ganzen Gewicht; so verhält sich die Differenz der Comparationszahlen zu der ganzen Thara, deren Grösse man sucht, z. E. In jenem Falle spräche man: $100 : 450 = 2 : 9$. Und wenn die ersten 3 Glieder bekannt wären;

wären; so würde das letzte bekannt werden. Es ist auch leicht einzusehen, daß wenn man die Thara zum Netto addirt, das Brutto die Summe sey, und wenn man von dem Brutto die Thara subtrahirt, das Netto gefunden werde.

§ 80.

Die Zinse-Rechnung hat nicht die geringste Schwierigkeit. Die merkwürdigen Proportionalsätze sind folgende. Erstlich: Wie sich verhält Capital zu Capital, so verhält sich Interesse zu Interesse auf gleiche Zeiten und zu gleichen Procenten. Zweytens: Wie sich verhält Grund-Capital zu Grund-Capital, so verhält sich die Summe von jenem Capital und seiner Zinse, zu der Summe dieses Capitals und seiner Zinse nemlich auf gleiche Zeiten und zu gleichen Procenten. Z. E. In diesem Falle verhält sich 100 Thaler zu 1000 Thaler Capital, wie 20 Thaler Interesse zu 200 Thaler Interesse, nemlich beyde Capitalien zu 5 Procent und auf 4 Jahr gerechnet. Es würden sich auch in diesem Falle 100 Thaler zu 1000 Thaler verhalten, wie 120 Thaler zu 1200 Thaler, als welches die durch die Zinsen angewachsenen Capitalien sind. Drittens. Ich hoffe nicht, daß jemanden das Wort Procent dunkel sey. Es ist nemlich ein Procent $\frac{1}{100}$ von dem Capital, wovon die Rede ist. Zwey Procent sind $\frac{2}{100}$, drey Procent sind $\frac{3}{100}$ davon, u. s. w. Es stehen also die Procente von gleichen Capitalien und auf gleiche Zeiten, mit den respectiven Zinsen in Proportion. Es

versteht sich auch, daß $\frac{5}{100}$ von 100 nichts anders, als 5, und daß also 5 Procent davon nichts anders, als 5 sey, gleichwie 6 Procent von 100, nichts anders als 6, und 7 Procent von 100, nichts anders als 7 ist, u. s. w. Viertens. Wenn die Procente ungleich sind, und die Zeiten gleich; so verhält sich Zinse zu Zinse, wie jenes durch seine Procente multiplicirte Capital, zu diesem durch seine Procente multiplicirten Capital. Warum dieses? Weil sich die Zinse überhaupt nach demjenigen Producte richtet, wozu das Capital, die Zeit, und die Procente die Factoren sind. Z. E. Wenn 100 Thaler in einem Jahre 5 Procent Zinse geben; so geben 800 Thaler in 9 Monath 30 Thaler. Denn 100 x 12 zu 5, ist wie 800 x 9 zu 30. Fünftens. Wenn also sowohl Capitalien als die Procenten und die Zeiten ungleich sind; so verhalten sich die Zinsen, wie diese beyden, aus dreyen Factoren entspringende, Producte. z. E. Wenn 300 Thaler zu 5 Procent, in 4 Jahren, 60 Thaler geben; so geben 1000 Thaler, zu 4 Procent, in 3 Jahren, 120 Thaler Interesse. Denn 300 x 5 x 4 : 1000 x 4 x 3 = 60 : 120. Es wäre aber überflüßig in diesem und andern ähnlichen Fällen, die Interesse aus der Proportion mit andern Interessen zu berechnen, da man z. E. viel leichter die Interesse eines jeden Capitals aus seiner Grösse, aus den Procenten und aus der Zeit bestimmet.

Sind nun die unbezahlten Interessen vieler Zeiten (wobey man aber nicht Zinse auf Zinse rechnet) in eine Summe zu bringen; so ist es

durch

durch die Multiplication am leichtesten geschehen. z. E. Wenn 100 Thaler zu 5 Procent 25 Jahre ohne Abtrag der Zinsen gestanden sind; so beläuft sich die Forderung der Zinse auf 5 x 25, oder auf 125 Thaler, welches mit dem Capital eine Summe von 225 Thaler macht.

Es sey die Frage, wie groß das Grund-Capital gewesen, welches in 25 Jahren mit den unbezahlten Interessen zu 5 Procent, zu einem Capitale von 225 Thaler angewachsen sey. Man nenne, um die Einsicht in solche Rechnungen allgemein zu machen, das erste kleinere Capital k, das grössere angewachsene g, die Zeit z, die Procente p, und dasjenige, was nach diesen Procenten jährlich sollte bezahlt werden, nenne man b. Nach k wird gefragt. Und dieses k ist $= g - zb = g - \frac{zp}{100}$. Also, wenn an beyden Seiten $\frac{zp}{100}$ addirt wird, so ist $k + (\frac{zp}{100} k) = g$. Folglich ist $(1 + \frac{zp}{100}) k = g$. Also ist endlich $k = g : 1 + \frac{zp}{100}$. Wenn man diese Buchstaben nach unserm Exempel in Zahlen verwandelt; so wird man finden, daß das Stamm-Capital 100 Thlr. sey.

Schwerer ist es, die selten gewöhnliche Interesse auf Interesse zu berechnen. Man müßte, um die Grösse des angewachsenen Capitals auszumachen, erstlich rechnen, wie groß es nach dem Verlaufe des ersten Jahres, ferner des zweyten Jahres, alsdann des dritten Jahres u. s. w. bis

nach

nach dem Verlaufe des letzten Jahres wäre. So würde man doch endlich zum Zwecke kommen, nachdem man die Mühe sehr verdrießlicher Bruchrechnungen gehabt hätte. Jedoch da nach Verlauf eines jeden Jahres die vorige Schuld immer durch einerley Factor multipliciret wird, welcher Factor $1 + \frac{p}{100}$ ist; so wäre es auch ein Mittel, die nach Verlauf vieler Jahre angewachsene Schuld zu finden, wenn man von $1 + \frac{p}{100}$ eine solche Potenz machte, deren Exponent die Zahl der Jahre oder z wäre, und wenn man durch diese Potenz $(1 + \frac{p}{100})^z$ das Stamm-Capital multiplicirte. Ich sage $g = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)^z$. Hätte zum Exempel das Capital von 100 Thaler, 3 Jahre zu 5 Procent gestanden; so wäre die endlich angewachsene Forderung $= 100 \times (1 + \frac{5}{100})^3 = 100 \times (1 + \frac{1}{20})^3 = 100 \times (\frac{21}{20})^3 = 100 \times \frac{9261}{8000} = \frac{9261}{80} = 115\frac{61}{80}$ Rthl. Aus diesen Gleichungen lassen sich andre finden, wodurch alle bey solchen Rechnungen vorkommende Fragen aufgelöst werden.

§ 81.

Rabatt ist ein gewisser Abzug von einer Schuldforderung, welchen der Schuldner mit Bewilligung des Schuldherrn, wegen baarer Bezahlung, oder aus andern Ursachen, zurück behält, ungeachtet die ganze Schuldforderung getilgt wird.

Die relative Grösse des Rabatts ist der Quotient bey der Division des Rabatts durch das Capital, wovon der Rabatt zugestanden wird. z. E. Wenn 80 Thaler mit 74 Thalern baar bezahlt würden; so wäre der Rabatt 6 Thaler, oder die Differenz der ganzen Forderung und der baaren Bezahlung, und dieser Rabatt hätte die relative Grösse von $\frac{6}{80}$, oder $\frac{3}{40}$.

Es sind also bey der Rabattrechnung die Comparationszahlen des ganzen Capitals und des abgekürzten Capitals wohl zu merken. Denn vermittelst derselben läßt sich der Name des ganzen unabgekürzten Capitals auf gewöhnliche Weise leicht in den Namen des abgekürzten, oder umgekehrt, der Name dieses in den Namen jenes, verwandeln. In unserm Exempel waren 80 und 74 die Comparationszahlen.

Wenn die relative Grösse des Rabatts **durch Procente**, oder durch p verabredet wird; so hat das Wort Procent im Kaufmannsstile mehrentheils eine besondere Bedeutung. Die Comparationszahlen sind alsdenn nicht, wie man denken sollte, 100 und 100 — p, sondern 100 + p, und 100. Sie sind z. E. nicht, (wenn die Rede von 6 Procenten ist), 100 und 94, sondern 106 und 100, das ist, für 106 gilt jedesmal das abgekürzte Capital 100. Oder man bezahlt mit baaren 100 Thalern, wenn von 6 Procent Rabatt die Rede ist, eine Forderung von 106 Thalern. Man würde mit 100 baaren Thalern eine Forderung von 107, 108, 109, 110, 111, 112 Thalern bezahlen, wenn 7, 8, 9, 10, 11, 12 Procent Rabatt

batt verabredet wären. Daher ist 5 Procent Rabatt nicht, wie in der Zinserechnung $\frac{5}{100}$, oder $\frac{1}{20}$ von dem Capitale, sondern $\frac{5}{105}$, oder $\frac{1}{21}$. Und 6 Procent Rabatt beträgt $\frac{6}{106}$, oder $\frac{3}{53}$.

Man wird aufhören, sich über diese Rechnungsart zu verwundern, wenn man die Ursache des Rabatts weiß. Der Kaufmann, welcher Waaren auf künftige Bezahlung verkauft, setzet den Preis der Waaren um so viel höher an, als der Gebrauch des baaren Geldes ihm bis zum gesetzten Termine wehrt ist, welches bey Kaufleuten, die mit ihrem Gelde verdienen, mehr als 5, ja wohl 12 Procent, jährlich beträgt. Bekömmt er also baare Bezahlung, so rechnet er gerne die zu dem Preise der Waaren zugeschlagene Interesse ab. Gesetzt, dieselbe wäre 10 Procent; so hätte er für 100 Thaler jedesmal 110 Thaler gerechnet, und eben durch diese Rechnung wäre seine Forderung so groß geworden. Er muß also, wenn er die 10 Procent Interesse wieder abrechnet, für jede 110 Thaler die in der ganzen Forderung sind, mit 100 baaren Thalern zufrieden seyn, nicht aber mit 90 für 100, als wodurch er sich schaden würde, weil alsdann $\frac{10}{100}$, das ist $\frac{1}{10}$, abgehen würde, da nur $\frac{10}{110}$, das ist $\frac{1}{11}$, abgehen sollte. Und eben so ist es mit den andern Procenten in der Rabatt-Rechnung.

Ich habe schon gezeigt, wie man durch Hülfe der verabredeten Comparationszahlen, wobey das Wort Procent recht zu verstehen ist, die Nahmenänderung des nicht abgekürzten und abgekürzten Capitals, vermittelst der Multiplication durch die ungleich-

ungleichnahmige, und vermittelst der Division durch die gleichnahmige Comparationszahl vornehmen solle. **Will man den ganzen Betrag des Rabatts wissen;** so muß man das ganze Capital durch die relative Grösse des Rabatts multipliciren. Es besteht aber diese relative Grösse, wie gesagt ist, aus einem Quotienten oder Bruche, dessen Zähler in der Differenz der Comparationszahlen und dessen Nenner in der grössern Comparationszahl besteht, z. E. Gesetzt, es sollen 4000 Thaler um 2 Jahre bezahlt werden: der Schuldherr will baare Bezahlung mit 10 Procent jährlichem Rabatte, oder überhaupt mit 20 Procent annehmen; so sind die Comparationszahlen 120 und 100. Ihre Differenz ist 20. Die gröẞte Comparationszahl 120. Die relative Grösse des Rabatts $\frac{20}{120}$, oder $\frac{1}{6}$. Man multiplicire 4000 Thaler durch $\frac{1}{6}$; so beträgt der ganze Rabatt $666\frac{2}{3}$ Thaler, und es wird baar bezahlt $4000 - 666\frac{2}{3}$ Thaler, oder $3333\frac{1}{3}$ Thaler. Daß dieses seine Richtigkeit habe, erhellet auch daraus, weil der Schuldherr, wenn er die $3333\frac{1}{3}$ Thaler auf jährliche Zinsen zu 10 Procent legte, in 2 Jahren $666\frac{2}{3}$ Thaler dafür bekommen, und also am Ende dieses Termins eben sowohl $3333\frac{1}{3} + 666\frac{2}{3}$, das ist 4000 Thaler haben würde, als wenn ihm der Schuldner erst alsdenn bezahlt hätte.

§. 82.

Aus dem Vortheile, den ein Kaufmann mit baarem Gelde macht, erhellet, daß es ihm oftmahls gleichgültig sey, ob er verschiedene Capitalien, die in verschiedenen Terminen bezahlt werden sollen,

in

in anders abgetheilten Posten, und in anders gesetzten Terminen erhalte.

Die Grundregel, die dabey beobachtet wird, ist diese, daß der Schuldherr sein ganzes Capital in anders abgetheilten Posten sowohl, als in den vorigen, erhalte, und daß er, was den Wehrt des Gebrauches der baaren Summe betrifft, auf der einen Seite so viel verliere, als er auf der andern Seite gewinnt. Man nennt die Rechnung von solcher billigen Versetzung der Terminen, die **Reduction** derselben.

Gesetzt, jemand ist schuldig, verschiedene Capitalien, ohne Interesse, auf verschiedene Terminen, und es soll nach Billigkeit verabredet werden ein einziger Termin, an welchem alles bezahlt wird. Ich will die verschiedenen Capitalien immer a, b, c, u. s. w. nennen, und die respectiven Terminen mögen heissen t^a, t^b, t^c, u. s. w. wodurch ich aber in diesem Falle gar keine Potenzen oder Dignitäten anzeigen will. Die Summe aller Capitalien, oder $a + b + c$, u. s. w. sey $= S$. Und der gemeinschaftliche Termin sey $= t^s$; so muß nach der Grundregel der Reduction seyn $t^s s = t^a a + t^b b + t^c c$. Folglich, wenn man beyde gleiche Glieder durch s dividirt; so ist $t^s = \frac{t^a a + t^b b + t^c c}{s}$. Es sey z. E. $a = 1500$ Rthlr. Und $b = 2500$ Rthlr. und $c = 2000$ Rthlr. $t^a = 7$ Mon. $t^b = 9$ Mon. $t^c = 11$ Mon. So ist $S = 6000$ Rthlr. Also $t^s = \frac{1500 \times 7 + 2500 \times 9 + 2000 \times 11}{6000.}$ $= 9\frac{1}{6}$ Monath. Es

Es sollte jemand bezahlen S, oder 3000 Rthl. über t^s, oder über 12 Monath. Er entrichtet aber a, oder 700 Thaler nach t^a, oder nach 6 Monath; ferner entrichtet er b, oder 800 Thal. nach t^b, oder nach 8 Monath; ferner entrichtet er c, oder 900 Thal. nach t^c, oder nach 16 Mon. Frage, was ist der Termin t^d, worinnen der Rest, oder d, welcher sich hier auf 600 Thaler beläuft, bezahlt werden muß? Nach der allgemeinen Regel der Reduction, ist $t^s S = t^a a + t^b b + t^c c + t^d d$. Also ist $t^d d = t^s s - t^a a - t^b b - t^c c$. Folglich ist $t^d = \frac{t^s s - t^a a - t^b b - t^c c}{d}$, und in unserm Exempel = $18\frac{1}{7}$ Monath.

Einer ist schuldig a, oder 1500 Thaler über t^a, oder 5 Monath, ferner b, oder 2500 Thaler, über t^b, oder über 13 Monath. Er will gerne die Hälfte der ganzen Summe, oder $\frac{s}{2}$ zweymal in zweyen Terminen, in t^c und in t^d bezahlen, und wünschet eine Frist zwischen beyden, nemlich f, oder 8 Monath. Frage, welche sind die Terminen t^c und t^d? Bey der Auflösung muß man erstlich merken, daß $t^c + f = t^d$. Daher hat man, weil f bekannt ist, beyde Fragen aufgelöst, wenn man t^c findet. Es ist aber zweytens nach der allgemeinen Regel der Reduction $\frac{t^c s}{2} + \frac{t^d s}{2}$, (oder $\frac{(t^c + (t^c + f))s}{2}$, oder $\frac{(2t^c + f)S}{2} = t^a a + t^b b$. Also $(2t^c + f) S = 2$

 $(t^a a +$

$(t^a a + t^b b)$. Also $2t^c + f = \frac{2(t^a a + t^b b)}{s}$. Also $2t^c = \frac{2(t^a a + t^b b)}{s} - f$. Also $t^c = \frac{2(t^a a + t^b b)}{2s} - \frac{f}{2} = \frac{t^a a + t^b b}{s} - \frac{f}{2}$, oder in unserm Exempel ist t^c, 6 Monath, daher $t^d = 6 + 8 = 14$ Monathe.

Wenn von den Geldern zwischen den Terminen Zinsen bezahlt werden müssen, und zwar die Procente verschieden sind; so wird die Reduction auf andere Terminen so angestellt, daß der Schuldner eben so viel Zinsen bezahlen muß, als wenn die alten Terminen geblieben wären, z. E. Jemand ist schuldig 2000 Thaler über $3\frac{1}{7}$ Monath zu 6 Procent; ferner 3000 Thaler über 6 Monath zu 7 Procent, und endlich 4000 Thaler über 7 Monath zu 8 Procent. Soll die ganze Summe zwischen den verschiedenen Terminen auf einmal mit den Zinsen bezahlt werden; so heisse dieser Termin t. Es muß die Zinse in der Zeit t, für 2000 Thaler zu 6 Procent, für 3000 Thaler zu 7 Procent, und für 4000 Thaler zu 8 Procent, (nemlich jährlicher Zinse) gleich seyn der Zinse, welche für die gesagten Capitalien zu eben denselben Procenten nach den zuerst gesetzten Terminen bezahlt werden sollte, und diese Zinse würde sich belaufen auf 325 Thaler. Es muß also die Zinse für den Termin t, und für die drey Capitalien nach ihren respectiven Procenten, sich eben so hoch belaufen. Das ist, wenn ich setze $(100 \times 12) : 6 = (2000\ t) : X$; und wenn ich ferner setze $(100 \times 12) : 7 =$

(3000

(3000 t):Y; und wenn ich endlich setze (100×12): 8=(4000 t):Z; so muß X+Y+Z seyn=325 Thaler. Nun ist X nach der Proportionalrechnung $=\frac{12000}{1200}$ t. Und Y ist $=\frac{21000}{1200}$ t. Und Z ist $=\frac{32000}{1200}$ t. Also ist X+Y+Z$=\frac{65000}{1200}$ t, oder $54\frac{1}{6}$ t. Es soll also $54\frac{1}{6}$ t seyn = 325. Also ist t=325 : $54\frac{1}{6}$=6 Monath. Oder, um in allgemeinen Ausdrücken zu reden: **Die Summe der Zinsen für verschiedene Capitalien, bis zu dem, anstatt aller vorigen Terminen anzunehmenden, neuen gemeinschaftlichen Termine, muß gleich seyn der Summe der Zinsen, der verschiedenen alten Terminen von den verschiedenen Capitalien: Also ist der neue gemeinschaftliche Termin zu bestimmen durch die Summe dieser Zinsen, wenn dieselbe dividirt wird durch die Summe derjenigen Zinse, welche die verschiedenen Capitalien nach ihren verschiedenen Procenten in derjenigen Zeiteinheit geben würden, wovon der neue zu verabredende Termin benahmt wird.** Und diese Zinse, welche aus verschiedenen Procenten verschiedener Capitalien bis an den neuen Termin erwächst, läßt sich sehr leicht als eine solche Zinse betrachten, die auch alsdann gegeben werden müßte, **wenn die ganze Summe aller Capitalien bis eben dahin zu einerley Procenten stünden.** Daher, wenn man es wissen wollte, die neuen gemeinschaftlichen Procente anstatt der alten verschiedenen, leicht berechnet würden. Denn man dürfte nur, wenn man den gemeinschaftlichen Termin erst hätte, untersuchen, zu wieviel Procenten die Summe aller Ca-

pitalien bis zu dem gesagten Termine stehen müßten, wenn die bekannte Summe der Zinsen herauskommen sollte. Dieses findet man durch folgenden Proportionalsatz: Wie sich verhält die bekannte Summe der Capitalien zu der bekannten Summe der Interessen in der Zeit, die der Termin anzeigt; so verhält sich 100 zu den unbekaunten Procenten während eines Jahres. Das ist, wenn man S, die Summe der Capitalien; Z die Summe der Zinsen; p die Summe der unbekannten Procente; und t den Termin nennt; so ist S t (in Monathen benahmt,) zu Z, wie 100 x 12 Monathe, zu dem unbekannten p, oder zu den Procenten. Oder p (S t) $= (100 \times 12)$ Z. Folglich $p = \frac{100 \times 12\, Z}{S\, t.}$ Also dürfte man nach dem vorigen Exempel, da 9000 Thaler nach 6 Monathen mit 325 Thalern Interesse bezahlt werden sollten, die gemeinschaftlichen Procente folgendermassen berechnen, $(9000 \times 6) : 325 = (100 \times 12) : p$. Alsdann würde p seyn $= \frac{100 \times 12 \times 325}{9000 \times 6}$, oder $7\frac{2}{9}$ Procente.

§ 83.

Bey **Umsetzung der Geldsorten** ist fast nichts zu merken, als daß man durch die Nahmenänderung vermittelst der bekannten Comparationszahlen, die zu verwechselnde Summe eben so, wie die einzuwechselnde benahmen müsse. Wenn z. E. die Frage ist, wieviel Species-Ducaten man für 2000 Rthlr. bekomme, und wenn $2\frac{5}{8}$ Rthlr., und 1 Ducaten für gleich geachtet werden; so sind 2000 Rthlr. $= 2000 : 2\frac{5}{8}$ Ducaten, oder $705\frac{15}{17}$ Ducaten.

Soll

Soll nun demjenigen, der aus dem Wechseln ein Geschäfft machet, oder der es mit uns verabredet, noch für jedes Stück, das wir bey ihm einwechseln, oder auch bey ihm verwechseln, noch ein gewisses Aufgeld bezahlt werden; so ist es leicht zu begreifen, daß dieses Aufgeld zusammen ein Product aus dem Aufgelde eines einzigen Stückes, und aus der Zahl dieser Stücke sey, und daß man ihm dieses Aufgeld entweder besonders bezahlen müsse, oder daß er von seiner Münzsorte uns so viel weniger gebe, als das Aufgeld wegen der wirklich gegebenen Stücke beträgt.

Wird nun das Aufgeld zu Procenten gerechnet, z. E. verlangt er 2 Procent Aufgeld; so wird das Wort Procent bald nach der einschliessenden Bedeutung, wie in der Thara-Rechnung bald nach der ausschliessenden Bedeutung, wie in der Rabatt-Rechnung verstanden. In jenem Falle bezahlt er 98 für 100, in diesem Falle bezahlt er 100 für 102. Und wenn man diese Comparationszahlen merkt; so verändert man leicht den Namen des, wegen des Aufgeldes noch nicht verkürzten, Capitales in den Namen des verkürzten. z. E. Wenn in dem obigen Falle, da für 2000 Thaler sollten $705\frac{15}{17}$ Ducaten bezahlt werden, der Wechsler noch 2 Procent Aufgeld in einschliessender Bedeutung rechnete; so würde er unsere 2000 Thaler nur für $\frac{2000 \times 98}{100}$, das ist für 1960 Thaler ansehen, und alsdann erst den Ducaten für $2\frac{5}{6}$ Thaler berechnen, und uns nur $691\frac{13}{17}$ Ducaten geben. Doch die Worte, vermittelst wel-

cher man sich im Wechseln und Verwechseln ausdrücket, haben zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten auch verschiedene Bedeutungen, die man jedesmal merken, oder wornach man sich erkundigen muß.

§. 84.

Ein **Wechselbrief** ist eine geschriebene Verpflichtung jemandes, daß er dem Inhaber desselben, das darinnen bestimmte Geld in bestimmter Münzsorte, an dem bestimmten Orte durch einen daselbst wohnenden Freund, auszahlen lassen wolle. Der den Wechselbrief schreibt und verkauft, und von sich giebt, heißt der **Trassant**; der ihn kauft, heißt der **Remittent**. Derselbige sendet denselben gemeiniglich nach dem andern Orte an jemanden, welcher für ihn das Geld einfordern soll, und der **Repråsentant** genennet wird. Dieser frågt denjenigen, von dem das Geld gehoben werden soll, ob er sich zur Bezahlung verpflichte. Thut derselbe dieses; so heißt er **Acceptant**. Und von diesen 4 Personen wird in dem auslåndischen Wechselgeschäfte oft geredet. **In den Fragen wegen des Wechselgeschäfts, kömmt es hauptsächlich darauf an, die Comparationszahlen zwischen dem verschiedenen Gelde, für welches der Remittent den Wechselbrief kauft, und zwischen demjenigen, welches an seinen Repråsentanten bezahlt wird, zu wissen.** z. E. Gesetzt, ein Trassant empfångt in Hamburg 2550 Mark Banco, und verspricht für jeden Wechselthaler, nemlich für jede 2 Mark Banco, in Amsterdam bezahlen zu

zu lassen $33\frac{2}{3}$ Stüver; so muß in Amsterdam bezahlt werden 2146 Gulden 5 Stüver. Denn die Zahl der Wechselthaler ist alsdann 1275. Diese multiplicirt durch $33\frac{2}{3}$ Stüver (oder durch $1\frac{41}{60}$ Gulden, (weil 1 Gulden 20 Stüver ist) wird $2146\frac{1}{4}$ Gulden.

Es wird oft mit Wechselbriefen gehandelt, ich will sagen, der Eigenthumsherr eines Wechselbriefes verkauft sein Recht vermittelst einer darauf geschriebenen Ceßion, welche Indossement heißt. Aus dem Gesagten wird man verstehen, daß ein Wechselbrief auf Amsterdam, von $3820\frac{1}{2}$ Wechselthalern, einen jeden zu $33\frac{1}{3}$ Stüver gerechnet, nicht mehr nicht weniger wehrt sey, als zwey acceptirte und indossirte Wechselbriefe, einen von 2500 Thalern à $34\frac{1}{2}$ Stüver, den andern von 1200 Thalern à $34\frac{1}{4}$ Stüver. Denn der Wehrt des allerersten beträgt in Holland $6367\frac{1}{2}$ Gulden, und eben so viel wird für die beyden letzten Briefe zusammen bezahlt.

Bey dem ausländischen Wechsel wird von dem Trassanten eine Summe Geldes, die er ausser Landes in seiner Gewalt hat, gleichsam verkauft, für eine bedungene Summe in anders benahmtem und mehrentheils einheimischem Gelde. Indem dieser Vertrag geschlossen wird, so verabreden sie sich, welche Comparationszahlen, davon eine von jenem Gelde, die andre von diesem Gelde benahmt wird, in ihrem Kaufe und Verkaufe sollen für gleich geachtet werden, z. E. der Contract wird so gemacht, daß für 2 Mark Hamburger Banco $33\frac{1}{3}$ Stüver, oder daß für 2 Thaler Ham-

burger Banco, 100 Stüver, oder 5 Gulden gerechnet werden. Wird nun der Handel so geschlossen, daß die verabredeten Comparationszahlen von solchen Summen verschiedener Münzsorten benahmt sind, die nach dem allgemeinen Urtheile einerley innerlichen Wehrt haben; so dünkt mich, daß man sagt, der Wechsel sey Alpari geschlossen, das ist, gekauft und verkauft. Wenigstens sehe ich nicht ein, wenn dieses die Bedeutung nicht seyn sollte, warum sonst mit Beständigkeit der Wehrt von $33\frac{1}{7}$ Stüver gegen 2 ℔ Banco, oder gegen einen Hamburg. Wechselthaler das Pari-Verhältniß haben würde.

Wird nun der Wehrt ausländischer und inländischer, oder überhaupt verschiedener Geldsorten, gegen einander nach diesem Pari berechnet; und nimmt man ferner an, daß, wenn der Wechselhandel nach dem Pari geschlossen wird, weder der Trassant, noch der Remittent verliehre oder gewinne; so wird man leicht sehen, auf welcher Seite der Gewinn oder der Verlust sey, wenn der Remittent andere Comparationszahlen, als dieses Pari erfordert, mit dem Trassanten verabredet. Denn wenn die Pari-Zahl des inländischen Geldes als der Nenner, und die Pari-Zahl des ausländischen Geldes als der Zähler betrachtet wird, und wenn man eben also die verabredeten Comparationszahlen als einen Bruch betrachtet; so verliert der Remittent, wenn dieser zweyte Bruch grösser ist, als der erste. Ist aber der erste Bruch grösser, als der zweyte; so gewinnt der Remittent. Man begreift aber leicht, daß, wenn

man

man die beyden Brüche vergleichen will, ein Zähler mit dem andern, und ein Nenner mit dem andern gleichbenahmt seyn müssen. Gesetzt Pari sey 2 Thaler Banco und 100 Stüver; so wäre dieser erste Bruch $\frac{2}{100}$. Gesetzt, es würde verabredet, 100 Thaler Banco gegen 251 Gulden, oder gegen 5020 Stüver; so würde der Remittent bey diesem Handel gewinnen, weil $\frac{2}{100}$ mehr ist, als $\frac{100}{5020}$, oder als $\frac{10}{502}$, oder als $\frac{5}{251}$. Gemeiniglich aber behält man die eine Parizahl als feststehend bey, indem man Comparationszahlen verabredet. Und der eben itzt erwähnte Vertrag würde daher so lauten: 1 Wechselthaler, oder 2 Mark Banco, sollen $33\frac{7}{15}$ Stüver gelten. Da nun 1 Wechselthaler und $33\frac{1}{3}$ Stüver Pari sind; so sieht man leichter, als vorher, daß der Bruch ($2:33\frac{7}{15}$) kleiner sey, als der Bruch ($2:33\frac{1}{3}$), und also der Remittent bey diesem Handel gewinne. Dieses erhellt auch unmittelbar daraus, weil er in dem geschlossenen Handel $33\frac{7}{15}$ Stüver für einen Wechselthaler bekömmt, da er nach dem Pari nur $33\frac{1}{3}$ Stüver dafür bekommen würde. Ihm wird also $\frac{2}{15}$ Stüver mehr gegeben, welches in einer grossen Summe von Thalern etwas Ansehnliches beträgt.

Wenn man zwischen Amsterdammer und Hamburger Geld einen Wechsel schließt; so setzt man allemal einen Hamburger Wechselthaler, welcher 2 Mark Banco ist, als eine der beyden zu verabredenden Comparationszahlen fest. Aber man giebt oder bekömmt in dem Wechselbriefe für einen solchen Thaler, vermöge der Abrede, bald mehr, bald

weniger Stüver. Dieses will man mit folgenden Worten sagen: Hamburg hat gegen Amsterdam den feststehenden Wechselpreis, Amsterdam aber gegen Hamburg den veränderlichen, oder: Hamburg hat das feststehende, Amsterdam das veränderliche Geld. Und eben so ist es zwischen andern Oertern, wo zwischengewechselt wird, der eine hat das feststehende, der andere das veränderliche Geld.

Daher sagt man, daß **der Wechsel über Pari geschlossen sey**, wenn die verabredete Comparationszahl des veränderlichen Geldes grösser ist, als in dem Pari-Verhältniß. Hingegen wäre diese Comparationszahl kleiner; so würde man sagen, **der Wechsel sey unter Pari geschlossen.** Sollte ich wider Vermuthen zuweilen unkaufmännisch reden, so bitte ich, die Worte nach meinen Erklärungen, in diesem Unterrichte zu verstehen.

Der Trassant und Remittent vertauschen Gelder, der eine das veränderliche, der andere das feststehende, und zwar entweder in Pari, oder über Pari, oder unter Pari. Im ersten Falle verliert und gewinnt keiner, nemlich durch diesen einzigen Handel; im zweyten Falle, verliert derjenige, der das veränderliche Geld vertauscht. Eben derselbe gewinnt in dem dritten Falle, und was einer gewinnt, das verliert der andere.

Es kömmt aber, wie gesagt ist, in dem Handel zwischen dem Trassanten und Remittenten allemal eine, von dem feststehenden Gelde benahmte, Zahl vor. **Wenn nun über Pari geschlossen wird; so ist der ganze Verlust dessen**, der das veränderliche

derliche Geld giebt, zu ermessen aus dem Producte, welches folgende Factoren hat. Der erste Factor ist, die Differenz zwischen der verabredeten Comparationszahl des veränderlichen Geldes, und zwischen derjenigen Comparationszahl eben desselben, welche in dem Pari-Verhältnisse vorkömmt. Der zweyte Factor ist diejenige Zahl, welche anzeigt, wie vielmal in der ganzen von dem feststehenden Gelde benahmten Summe, die im Pari-Verhältnisse, eben so benahmte Zahl enthalten sey, z. E. Wer 34 Stüver für einen Hamburgischen Wechselthaler giebt, und über 2000 solcher Thaler contrahirt, der verliert an Stüvern $(34 - 33\frac{1}{2}) \times \frac{2000}{1}$, das ist $\frac{1}{2} \times 2000$, oder 1000. Ist der **Wechsel unter Pari geschlossen**; so gewinnt derjenige, der das veränderliche Geld giebt, eben diese Differenz, eben so vielmal.

Die feststehende Valuta heißt das feststehende Geld, welches für das veränderliche, oder für die **veränderliche Valuta** gegeben wird. Der **Cours** ist das geometrische Verhältniß zwischen den verabredeten Comparationszahlen beyder Valuten. Mehrentheils wird das Wort Cours von dem, zu derselbigen Zeit wegen gewisser Umstände **gewöhnlichen, Cours** verstanden. In dem Cours ist die, von der beständigen Valuta benahmte, Comparationszahl allemal dieselbe. **Der Cours heißt niedrig**, wenn die unbeständige Valuta geringer ist, oder wenn die von dem unbeständigen Gelde benahmte Comparationszahl kleiner, als im Pariverhältniß, ist, z. E. Wenn für 1 Wechselthaler

thaler nur 33 Stüver gegeben werden. **Der Cours heißt hoch**, wenn die von dem unbeständigen Gelde benahmte Comparationszahl grösser ist, als in dem Pariverhältniß, z. E. Wenn für 1 Wechselthaler 34 Stüver gegeben würden. Bey dem niedrigen Cours verliert der Vertauscher des beständigen Geldes, und bey dem hohen Cours gewinnt er.

Wenn gesagt wird, daß eine sonst gleiche Summe Geldes von einer gewissen Münzsorte **um gewisse Procente besser oder schlechter** sey, als die sonst gleiche Summe von einer andern Münzsorte; so haben diese Worte gemeiniglich die Bedeutung, daß 100 von dem bessern Gelde gleich sey einer durch 100½, 101, 102, 103¼ (u. s. w.) angezeigten Summe von dem schlechtern Gelde. Oder, die Comparationszahl des besten, ist allemal 100.

Die **Wechselreduction** ist eine Rechnung, wodurch beantwortet wird, wie viel eine gewisse Summe von einer gewissen Geldsorte, in andern Geldsorten beträgt, wenn die erste Sorte durch Wechseltausch in ander fremd Geld, dieses wiederum in ander Geld, nach einem gewissen Cours, verwandelt wird, wobey oftmals zuletzt die erste Geldsorte in einer geringern oder grössern Summe wiederkömmt. **Bey dieser Rechnung hat man nichts anders zu thun**, als daß man mit den Summen allezeit eine Nahmenänderung vornehme, wobey jedesmal die Comparationszahlen des Courses oder der Abrede zum Grunde gelegt werden. Es sey der Fall dieser: Ein Amsterdammer Kaufmann

kauft

kauft in Leipzig auf Credit 1000 Louisdor a 5 Thl., er bezahlt Valuta hernach durch einen ihm creditirenden Freund in Hamburger Banco, so daß 135 Leipziger Thaler für 100 Thaler Species Hamburger Banco, (deren jeder 3 ℳ Banco gilt) angerechnet werden. Dem Hamburger, der auf ihn in Amsterdam traßirt, bezahlt er jeden Wechselthaler (oder jede 2 Mark Banco) mit $33\frac{2}{3}$ Stüver. Frage, was kommen ihm die 1000 Louisdor in holländischen Gulden? Die Berechnung ist folgende. Man verwandle 1000 Louisdor in Leipziger Thaler durch die Comparationszahlen 1 und 5. Antwort 5000 Thaler Leipz. Man verwandle 5000 Thaler Leipz. in Hamb. Species Banco-Thaler (à 3 ℳ Banco) durch die Comparationszahlen 135 und 100. Antwort, $3703\frac{19}{27}$ Hamb. Species Bancothaler. Man verwandle die Species Bancothaler in Wechselthaler, durch die Comparationszahlen 2 und 3. Antwort $5555\frac{5}{9}$ Wechselthaler. Man verwandle die Wechselthaler in Stüver durch die Comparationszahlen 1 und $33\frac{2}{3}$, Antwort $187037\frac{1}{27}$ Stüver. Man verwandle die Stüver in Gulden durch die Comparationszahlen 20 und 1. Antwort $9351\frac{23}{27}$ Gulden.

Gesetzt nun, der Amsterdammer Kaufmann hätte die in Leipzig gekauften 1000 Louisdor wiederum so verwechselt, und das Eingewechselte abermals so umgesetzt, (u. s. w.) daß er endlich dafür 9490 Gulden dafür bekäme; so sieht man wohl, daß er bey diesem Wechselhandel gewonnen habe. Denn seine Auslage ist nur beynahe 9352 Gulden; seine Einnahme aber 9490. Doch muß er

die

die Spesen oder die Unkosten abrechnen. Hätte er aber für die ausgelegten 9352 Gulden nur 9300 Gulden wieder bekommen, so würde er verlohren haben. Wenn man also bey der Wechselreduction von der Auslage zur Einnahme, oder umgekehrt, durch Nahmenänderung nach dem Cours, wornach contrahirt ist, fortschreitet, und eine von diesen beyden Summen, (nach dem Pariverhältniß) der andern gleichnahmig macht; so erfährt man **den Gewinn oder Verlust bey dem Wechselhandel.** Wenn man nemlich die Unkosten, die den Gewinn vermindern, oder den Verlust vergrössern, schon gerechnet hat, oder nicht achten will.

Ueberhaupt, wenn bey dem Handel Gewinn und Schaden zu berechnen ist; so ist **die absolute Grösse des Gewinnes oder Verlustes** die Differenz der Ausgabe und Einnahme, und zwar ist Gewinn da, wenn die Einnahme grösser ist.

Die relative Grösse des Gewinns ist der durch die Ausgabe dividirte absolute Gewinn, z. E. Wenn 6 Mark Ausgabe 8 Mark Einnahme verschaffen; so ist der absolute Gewinn 2 Mark, der relative aber $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$. Die, durch 100 multiplicirte, relative Grösse des Gewinns **ist der Gewinn in Procenten.** Z. E. Wenn $\frac{2}{9}$ gewonnen wird von der Ausgabe; so würde $\frac{2}{9} \times 100$ gewonnen werden, wenn die Ausgabe 100 wäre, also wird $\frac{200}{9}$ Procent, oder $22\frac{2}{9}$ Procent gewonnen.

Die relative Grösse des Verlustes ist ebenfalls der durch die Ausgabe dividirte absolute Verlust. Und multiplicirt man diesen relativen Verlust

durch

durch 100; so hat man den Verlust in Procenten, z. E. Wenn $5\frac{1}{4}$ Thaler Ausgabe, $4\frac{1}{2}$ Thaler Einnahme verschaffen; so ist der absolute Verlust $\frac{3}{4}$ Thaler. Der relative Verlust aber ist $\frac{3}{4}$, dividirt durch $5\frac{1}{4}$, oder er ist $\frac{3}{21}$. Hieraus sieht man, daß der Procentalverlust sey $14\frac{2}{7}$, weil diese Zahl eben so viel ist, als $\frac{3}{21} \times 100$.

Wenn man verschiedene Gelegenheiten hat, sein Capital, (das man an andern Orten hat, oder nach andern Orten übersenden will,) durch verschiedentliche Arten des Umsatzes im Wechsel, so oder so in fremde oder hiesige Münzsorten zu verwandeln, und an den Ort der Bestimmung zu bringen; so wählt man die vortheilhafteste, wodurch man mit der geringsten Ausgabe ein vorgesetztes, an andern Orten gültiges, Capital daselbst auszahlen läßt, oder wodurch man für ein an andern Orten ausstehendes Capital, das man herschaffen will, zuletzt das meiste hiesige Geld bekömmt. Die Berechnung, welche Art die vortheilhafteste sey, heißt **Wechsel-Arbitrage**, oder **Wechselwahl**. Diese Berechnung kömmt auf die Wechselreduction an. Will man nemlich ein Capital nach andern Orten hinschaffen; so untersuche man, wie viel ein Stück, oder eine Summe hiesiges Geldes, wenn es auf die eine Weise in dortiges Geld durch Wechsel verwandelt wird, in solchem Gelde ausmachen würde. Eben dieses untersuche man, im Falle man die zweyte, dritte, oder vierte Art wählen wollte. Diejenige ist die vortheilhafteste, wodurch eine gleiche hiesige Sum̃e Geldes in das meiste fremde Geld zuletzt verwan-

delt

delt wird. Will man aber Geld aus fremden Orten nach seinem Wohnsitze herbeyschaffen; so untersuche man auf diese Weise, durch welche Wechselart ein gleiches dortiges Capital zuletzt in das meiste hiesige Geld verwandelt werde. Gnug von Wechselsachen.

§ 85.

Man stelle sich ein Ganzes, in gewissen Abtheilungen vor, z. E. Man denke 12 als $5+4+2+1$, oder als $3+2+1+5+1$. Oder man denke den Bruch $\frac{5}{6}$ als ein Ganzes, das Theile hat. Nemlich, $\frac{5}{6}$ läßt sich ansehen als $\frac{1}{2}+\frac{2}{7}+\frac{1}{21}$. Es läßt sich aber jedes Ganze in verschiedene Anzahlen von solchen oder andern Theilen zerstrenen.

Man denke also ein auf gewisse Art zerlegtes Ganze. Es wird jeder Theil, ein, auf gewisse Weise benahmter, Theil oder Bruch des Ganzen seyn, z. E. entweder $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{4}$, oder $\frac{2}{3}$, oder $\frac{4}{5}$, von dem Ganzen, u. s. w. Wenn nach dem obigen Satze 12 das Ganze ist, und $5+4+2+1$, seine Theile sind; so hat 5 den Nahmen $\frac{5}{12}$, 4 hat den Nahmen $\frac{4}{12}$ oder $\frac{1}{3}$, 2 hat hat den Nahmen $\frac{2}{12}$ oder $\frac{1}{6}$, 1 hat den Nahmen $\frac{1}{12}$. **Und diesen Nahmen nenne ich das Verhältniß des Theils zum Ganzen.** Dieses Verhältniß ist also der Bruch, der den Theil zum Zähler, und das Ganze zum Nenner hat.

Wenn das Verhältniß eines jeden Theils zum Ganzen festgesetzt oder bekannt ist; so ist dadurch zugleich das Verhältniß eines jeden Theiles zum andern festgesetzt. **Denn jeder Theil ist, das, durch sein Verhältniß multiplicirte, Ganze,**

und

und die Theile verhalten sich gegen einander, wie diese respectiven Producte.

In dem folgenden Formular

$$G = A + B + C + D + E$$

$$g = a + b + c + d + e$$

sollen G und g, zwey verschiedene Ganzen bedeuten. Die Summe der obern Theile soll jenem, die Summe der untern Theile soll diesem Ganzen gleich seyn. Ich nenne die obere Ordnung der Theile, die bekannten Theile, in der untersten Ordnung aber stehen die unbekannten. Zwey Gegentheile aber nenne ich einen aus jener, einen aus dieser Ordnung, welche unter einander geschrieben, und hier mit einerley Buchstaben bezeichnet sind, nur mit dem Unterschiede, daß ich zu der bekannten Ordnung Capitalbuchstaben erwählt habe. Ich setze ferner voraus, daß jeder unbekannte Theil sich zu seinem Ganzen verhalten solle, wie sein bekannter Gegentheil zu dem obern Ganzen, oder, daß ein jeder unbekañte Theil ein eben solcher, ein eben so benahmter, Theil seines Ganzen seyn solle, als sein Gegentheil von dem obern Ganzen ist; woraus zugleich folgt, daß zwey unbekannte Theile sich gegen einander verhalten, wie die über ihnen geschriebenen Gegentheile. Alles dieses läßt sich kürzer so ausdrücken. G und g, sollen nach eben derselben Proportion in Theile zerlegt werden. Wenn nun die Theile des G bekannt sind, und mit g eine solche proportionirte Theilung vorgenommen werden soll; wie ist alsdann diese proportionirliche Theilung nach der Form der regulirenden Theilung anzustellen?

Erstlich, man will zuweilen nur die Grösse eines einzigen Theiles wissen. Alsdann setzt man das obere Ganze, ferner den obern Gegentheil, ferner das untere Ganze, endlich den unbekannten Gegentheil in einen Proportionalsatz, und suchet, weil die drey ersten Glieder bekannt sind, das vierte Glied. Es sey nemlich 12, vertheilt in 7 + 3 + 2. Es soll 280 eben so vertheilt werden, und man frägt nach dem Gegentheile von 2; so setze man, (wenn man den gesuchten Gegentheil U nennen will) $12:2 = 280:U$. Oder U ist $= \frac{2 \times 280}{12} = 46\frac{2}{3}$. Oder in allgemeinen Ausdrücken $U = \frac{Tg.}{G}$

Zweytens. Will man aber die Grösse eines jeden Theils von dem zweyten Ganzen wissen; so ist das erste Mittel dieses, daß man jeden Theil insbesondere so berechne, als ich von dem einen besondern Theile itzt gezeiget habe. Das zweyte Mittel ist, daß, (wenn man einen der Theile bereits gefunden hat,) sein oberer Gegentheil, und der darauf folgende obere Gegentheil, und der gefundene Theil, und derjenige Theil, den man sucht, in einen Proportionalsatz gesetzt werden, wodurch dieser folgende Theil bekannt wird. Denn die Theile sollen sich ja gegen einander verhalten, wie die respectiven Gegentheile. Es sey wiederum

$$G = A + B + C + D + E$$
$$g = a + b + c + d + e.$$

Man findet a durch den Satz $G:A = g:a$. Und b wird gefunden, wenn man setzet $A:B = a:b$. So auch c wird gefunden durch den Satz $B:C = b:c$, u. s. w.

Diese Arbeit wird in einigen Fällen erleichtert, wenn man Gelegenheit hat, das obere Ganze, und jeden obern Theil durch einerley Zahl zu dividiren. Denn die dadurch erlangten Zahlen haben noch eben dasselbe Verhältniß der vorigen Zahlen. Z. E. Wenn man etwas anders nach der Regel ($360 = 90 + 40 + 48 + 100 + 56 + 26$) eintheilen soll; so ist diese Regel einerley mit der folgenden, in welcher jede vorige, aber durch 2 dividirte, Zahl sich findet $180 = 45 + 20 + 24 + 50 + 28 + 13$. Eben so dürfte man die Regel $144 = 48 + 24 + 56 + 16$ in $18 = 6 + 3 + 7 + 2$ verwandeln, wenn man eine Zahl nach dieser Proportion eintheilen sollte.

Wenn man jemanden eine Eintheilungs-Regel geben will, und alle regulirenden Theile sagt; so ist es überflüßig, das regulirende Ganze ausdrücklich hinzuzusetzen. Z. E. Wenn eine Theilung vorzunehmen ist nach der Regel $20 = 9 + 7 + 4$; so dürfte man die Zahl 20 verschweigen, und man würde doch nicht unverständlich reden. Denn wer wird nicht leicht sehen oder berechnen, daß die Summe dieser Theile 20 sey?

Auch ist die Theilungsregel verständlich, wenn das Ganze und die Grösse jedes Theiles, ausser der Grösse eines einzigen, die man verschweiget, angezeiget wird. Z. E. Die Theilungsregel $20 = 7 + 5 + 6 + U$ ist schon deutlich. Denn U ist die Differenz des Ganzen und der Summe der ausdrücklich angezeigten Theile.

Mit einem Worte, wenn uns etwas gesagt wird, woraus wir die Theilungsregel schliessen

oder ergänzen können; so wird dieselbe für bekannt angesehen, weil man sie sich bekannt machen muß, ehe man von dieser regulirenden Theilung zu derjenigen fortschreitet, welche nach jener Proportion soll eingerichtet werden.

Bey Erbtheilungen wird die Theilungsregel gemeiniglich in Brüchen gegeben. Z. E. Dieser wird die Hälfte, der andere ein Viertheil haben; und das übrige theilen sich die andern 2 Erben. Hier ist 1 das regulirende oder obere Ganze. Und die Brüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ sind die regulirenden Theile.

Das Verhältniß eines Theils zum Ganzen, ist nichts anders, als der Bruch, in welchem der Theil den Zähler, und das Ganze den Nenner ausmacht. Z. E. Das Verhältniß desjenigen Theiles von 12, welcher 9 heißt, ist $\frac{9}{12}$, oder $\frac{3}{4}$. **Folglich, wenn das Ganze 1, und also die Theile Brüche sind; so ist das Verhältniß des Theiles, gleich dem Theile selbst.** Denn ($\frac{1}{4}$: 1) ist $\frac{1}{4}$. Und eben so ist es in allen Fällen. Ferner wissen wir schon, daß das Ganze, multiplicirt durch das Verhältniß seines Theiles, diesem Theile gleich werde. Folglich, da bey einer proportionirlichen Eintheiluug sich ein Gegentheil gegen sein Ganzes verhält, wie das andre Gegentheil gegen das andre Ganze, und da also beyde Gegentheile ein gleiches Verhältniß haben; so findet man auch (**und eben dieses ist die dritte Art**) die unbekannten Theile, wenn man erst jedes Verhältniß der obern Theile zu ihrem Ganzen berechnet, und das zweyte Ganze durch ein jedes von diesen Verhältnissen multiplicirt. z. E. Es sey

die Theilungsregel 3 + 6 † 2 † 1, wovon das Ganze 12 ist; so sind die Verhältnisse $\frac{3}{12}$, $\frac{6}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$, oder $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$. Ist nun die Eintheilung von 360 darnach zu reguliren; so hat man die neuen Theile in den Producten, $360 \times \frac{1}{4}$, $360 \times \frac{1}{2}$, $360 \times \frac{1}{6}$, $360 \times \frac{1}{12}$, oder in 90, 180, 60, 30. Weil nun in Erbschaften gemeiniglich die Theilungsregel in solchen Brüchen, die ihren Verhältnissen gegen ihr Ganzes gleich sind, gegeben wird; so findet man die Erbtheile gemeiniglich durch diese Multiplication der ganzen Verlassenschaft.

Man muß sich aber nicht irre machen lassen, wenn in einigen Testamenten die Theilungsregel in solchen Brüchen gegeben wird, **welche zusammen mehr als 1, oder weniger als 1 sind.** z. E. a soll $\frac{3}{4}$, und b soll $\frac{5}{8}$ von der Erbschaft haben, oder auch an a soll $\frac{1}{8}$ und an b soll $\frac{2}{7}$ fallen. Denn hier ist das regulirende Ganze (nicht 1, sondern) die zu berechnende Summe dieser Brüche. Und der erste Ausdruck bedeutet nichts anders, als: Der Theil des ersten Erben soll sich zu dem Theile des andern Erben verhalten, wie $\frac{3}{4}$ zu $\frac{5}{8}$, und zwar soll jener Theil eben das Verhältniß zur ganzen Verlassenschaft haben, als $\frac{3}{4}$ zu der Summe, ($\frac{3}{4}$ † $\frac{5}{8}$) hat, und der Theil des letzten Erben soll sich zur ganzen Verlassenschaft eben so verhalten, als sich $\frac{5}{8}$ zu der Summe ($\frac{3}{4}$ † $\frac{5}{8}$) verhält. Daher würde man sich in dieser Rechnung gewaltig versehen, wenn man die ganze Verlassenschaft durch $\frac{3}{4}$ oder $\frac{5}{8}$ multipliciren wollte, um den Theil des ersten oder des zweyten Erben zu finden.

Wenn im Commerz proportionirliche Theilungen sollen vorgenommen werden; so wird die Theilungsregel gegeben entweder durch die Abrede, oder durch die Einlage eines jeden in den ganzen Handel, das ist, durch das Verhältniß einer jeden besondern Einlage zu der ganzen Summe.

Das Achte Hauptstück.

Anwendung der Reesischen Kettenregel, mit einiger Veränderung.

§ 86.

Man hat einige Vortheile im Rechnen erfunden, vermittelst welcher die Mühe, die Zeit, und Raum, bey dem Rechnen zuweilen ersparet werden. Einige dieser Vortheile habe ich an verschiedenen Orten schon gezeigt, ich will sie aber doch hier zusammen ordnen, insonderheit weil des allerwichtigsten noch nicht erwehnt ist. Man nennt diese vortheilhafte Rechnungsart, wovon ich rede, deswegen die Reesische Kettenregel, weil Herr Reese die Freunde der Rechenkunst am aufmerksamsten darauf gemacht, und der Ausübung eine Form vorgeschrieben hat, welche von einigen nachgeahmt, von andern aber mehr oder weniger verändert ist. Dieser Vortheil ist für diejenigen, denen oft lange und verdrießliche Rechnungen vorkommen, sehr wichtig. Ich bin, was das Wesentliche

liche betrifft, mit demjenigen einig, was der Herr Syndicus Willig in der gründlichen Vorstellung der Reesischen allgemeinen Regel mit vieler Einsicht und grossem Fleisse davon gelehret hat. Ich weiche nur von dem Herrn Syndicus ab in der Methode, die Richtigkeit dieser Rechnungsart zu lehren und zu demonstriren. Ich will stuffenweise von dem Leichtern zum Schwerern fortschreiten, und, ohne einem bisher bekannten Plane zu folgen, von den vortheilhaftesten Rechnungsarten handeln.

§ 87.

Wenn ein Geübter eine Zahl durch eine einfache Ziffer zu multipliciren hat, z. E. 3456, durch 8; so bedarf er der gewöhnlichen Weitläuftigkeit nicht; er setze die Zahl, er setze den Factor mit einem Haacken zur Rechten, er multiplicire im Sinne, und setze das Product gleich darunter, z. E.

$$\begin{array}{l} \underline{3456} \quad (8 \\ 27648 \end{array}$$

Eben dieses ist rathsam im Dividiren, wenn der Divisor eine einzige Ziffer ist. Man dividire im Sinne, und setze den Quotienten darunter, und damit man sehe, was geschehen sey; so stehe der Divisor mit einem Haacken zur Linken des Dividendi, z. E.

$$\begin{array}{l} 8)\ \underline{3458} \\ \quad 432\tfrac{2}{8} \end{array}$$

Es wird die Multiplication und Division von einem Geübten gleichfalls ohne weitere Veranstaltung verrichtet, wenn der Factor oder Divisor

eine einzige Rangziffer ist, welche Nullen hinter sich hat, z. E. 45678 (900

41110200

So auch 900) 411102

$456\frac{702}{900}$

Man multiplicire oder dividire niemals durch einen Bruch, ehe derselbe genug verkleinert, oder zu dem kleinsten Ausdrucke gebracht ist, z. E. Der Bruch $\frac{36}{72}$ muß zuvor $\frac{1}{2}$ werden.

Man versparet sich ein paar Reihen Zahlen, wenn man zuweilen durch die Factoren nach einander multiplicirt, anstatt der Multiplication durch das Product. Es sey 789 durch 48 zu multipliciren, so multiplicire man Anfangs durch 6, hernach durch 8, z. E. 789 (6

4734 (8

37872

Eben also dividirt man bequemer durch die beyden Factoren nach einander, als durch das Product auf einmal, z. E. Wenn 17520 durch 48 soll dividirt werden; so ist die beygefügte Ausübung die leichtste 8) 17520

6) 2190

365

Wenn viele Brüche von verschiedenen Nennern unter einen Nenner zu bringen sind; so erleichtert man sich die Arbeit, wenn man Anfangs die Nenner neben einander, und zwar die kleinsten voran schreibt, und alsdann diejenigen wegstreicht, durch welche einige der folgenden aufgehen. Ferner,

ner, muß man diejenigen Nenner, welche sich durch eine gemeinschaftliche Zahl dividiren lassen, gleichfalls wegstreichen, und an ihrer Statt den Quotienten annehmen, doch die gemeinschaftl. Divisores bemerken. Welche Nenner alsdann bleiben, multiplicire man durch einander und durch die bemerkten Divisoren. Ihr Product ist der gemeinschaftliche Nenner von allen. Und die respectiven Zähler sind jedesmal das Product, welches entsteht, vermittelst der Multiplication des gemeinschaftlichen Nenners durch den Bruch in seinem alten Ausdruck. Die ungleichbenahmten Brüche mögen seyn $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{13}{16}$, $\frac{5}{18}$. Es sind also die Nenner, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 16, 18. Es werden ausgelöscht 2, 4, 8, weil 16 dadurch aufgeht. Gleichfalls werden 3 und 6 ausgelöscht, weil 18 dadurch aufgeht. Es bleibt auch nicht 5, weil 10 dadurch aufgeht. Daher bleiben Anfangs nur 10, 15, 16, 18. Aber anstatt 10 und 15, setzet man 2 und 3, als die Quotienten, wenn man durch 5 dividirt, und 5 wird als der gemeinschaftliche Divisor bemerkt. Es verschwinden aber 2 und 3, weil 16 durch 2, und 18 durch 3 aufgeht. Daher bleiben nur der bemerkte Divisor 5, ferner 16 und 18. Die beyden letzten lassen sich verkleinern, und werden 8 und 9, wenn man den gemeinschaftlichen Divisor 2 bemerkt. Also bleiben noch übrig die gemeinschaftlichen Divisoren 5 und 2, und ferner noch die Zahlen 8 und 9. Ihr Product ist 720, und eben dieses ist der gemeinschaftliche Nenner aller Brüche. Nun nehme man die Brüche nach der Ordnung vor, und multiplicire

einen jeden durch diesen gemeinschaftlichen Nenner, um den Zähler jedes neuen Bruchs zu finden. Thut man dieses bey allen; so ist geschehen, was verlangt wurde. Es wird alsdann $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{7}{10}, \frac{4}{15}, \frac{13}{16}, \frac{5}{18}$, verwandelt in $\frac{360}{720}, \frac{480}{720}, \frac{540}{720}, \frac{288}{720}, \frac{600}{720}, \frac{270}{720}, \frac{504}{720}, \frac{192}{720}, \frac{585}{720}, \frac{200}{720}$.

Man sieht wohl, daß auf solche Weise Brüche entstehen, die den vorigen an Grösse gleichen. Denn $\frac{a}{b} = \frac{(a:b)c}{c}$, weil der letzte Ausdruck den vorigen Bruch, durch einerley Zahl multiplicirt und dividirt, darstellet. Und nur diese Veränderung geht mit jedem der zuerst gegebnen Brüche vor.

§ 88.

Wir wollen uns zwey Columnen von Zahlen vorstellen, welche, wie in den beygeschriebenen Exempeln, die Länge herunter reichen.

4	—	8
20	—	50
3	—	7
14	—	48
15	—	11
33	—	45

Die Hauptcolumne oder Multiplicationscolumne, oder Hauptclasse, will ich diejenige nennen, welche zur rechten Hand stehet. Die Nebencolumne aber, oder die Divisionscolumne, oder die Nebenclasse, soll die Reihe derjenigen Zahlen seyn, welche zur linken Hand stehen. Es ist aber nicht nothwendig, daß beyde Columnen gleichviel Zahlen haben, sondern ich würde sie auch noch so nennen, wenn eine Classe mehr Zahlen hätte, als die andere.

Wenn

Wenn man aus allen Zahlen der Hauptcolumne ein Product macht, und dasselbe dividirt durch ein Product, welches aus allen Zahlen der Nebencolumne gemacht ist; so kömmt allemal eine gewisse Zahl, welche ich das Resultat oder r nennen will. Das r des vorigen Exempels ist 40, welches man sehen wird, wenn man multiplicirt und dividirt.

Nach unsern gemachten Bedingungen, hat man die beyden Columnen anzusehen als einen Quotienten oder Bruch, dessen Zähler aus den Factoren-mäßig gesetzten Zahlen der Hauptclasse besteht, und dessen Nenner durch die gleichfalls Factoren-mäßig gesetzten Zahlen der Nebenclasse angezeigt wird.

Wenn man den Zähler und Nenner eines Bruchs, oder das Dividendum und den Divisor durch einerley Zahl oder harmonisch dividirt; so bleibt der Inhalt des Bruchs, oder die Grösse des Quotienten, oder das Resultat, oder wie wir es nennen wollen, unser r, eben dasselbe, als es vorher war. Denn durch die gesagte Veränderung wird nur ein verkleinerter Ausdruck eben desselben Bruchs oder eben desselben Quotienten verursacht.

Also wenn in beyden Columnen einerley Zahl vorkömmt; so hat man Recht, diese beyden gleichen Zahlen beyde auszulöschen, und r wird dadurch nicht verändert, denn durch diese Auslöschung ist jede Columne auf gleiche Art dividirt.

Und so oft in beyden Columnen zwey Zahlen vorkommen, davon die eine durch die andre aufgeht; so darf man die kleinere Zahl in ihrer

Columne

Columne auslöschen, und anstatt der grössern Zahl, die in der Gegen-Columne war, den Quotienten setzen, welcher kömmt, wenn man diese grössere Zahl durch die ausgelöschte kleinere dividirt. Z. E. Wenn sich in einer Classe die Zahl 3, in der andern die Zahl 48 befindet; so lösche man 3 weg, und setze in der andern Classe 16 anstatt 48. Durch diese Veränderung der Columnen wird r nicht geändert; denn man hat beyde Columnen nur durch einerley Zahl dividirt, nemlich durch die ausgelöschte kleinere Zahl. Zwar sollte man anstatt der ausgelöschten Zahl, die Zahl 1 setzen; aber weil die Zahl 1 weder multiplicirt noch dividirt; so ist dieses nicht nöthig, woferne nur ausser der Zahl 1, die man wegläßt, noch andre Zahlen in derselben Classe zurück bleiben.

Endlich wenn es in beyden Classen zwey Zahlen giebt, welche, (ob sie zwar einander nicht gleich sind, und keine durch die andere aufgeht) sich dennoch durch eine gemeinschaftliche Zahl dividiren lassen; so hat man Recht, diese beyden Zahlen auszulöschen, und an ihrer Statt in den respectiven Classen die Quotienten zu setzen, welche vermittelst dieser harmonischen Division (durch einerley Zahl) entspringen. Gesetzt, es stünde in der Nebencolumne die Zahl 8, in der Hauptcolumne die Zahl 12. Wenn man beyde durch 4 dividirt; so entstehen daraus 2 und 3. Wenn man nun dort 8, und hier 12 auslöscht, und wiederum an ihrer Statt dort die Zahl 2, und hier die Zahl 3 hinsetzet; so ist geschehen, was ich sage. Und durch diese Veränderungen ist r oder

das

das Resultat schlechterdings nicht verändert. Denn der Zähler und der Nenner, oder das Dividendum und der Divisor, sind nur harmonisch, oder durch einerley Zahl dividirt.

Wenn nun nach angestellter Columnenänderung auf der Divisionsseite gar keine Zahl, oder nur die Zahl 1 nachbleibt; so ist, weil durch 1 nicht dividirt wird, das Resultat bloß dasjenige Product, welches durch die in der Hauptcolumne übriggebliebenen Factoren entsteht. Bleiben aber in der Divisionscolumne Zahlen übrig; so muß man dividiren. Und wenn der Divisor grösser ist, als das Dividendum; so ist das Resultat ein Bruch. Einige Exempel werden zeigen, wie sehr man sich auf solche Art die Mühe erleichtere, wenn man aus solchen zweyen Columnen das r, oder das Resultat finden soll. Und dieses ist keine, nur selten brauchbare Speculation; sondern ich werde in dem Folgenden zeigen, daß man sehr oftmalige Gelegenheit findet, durch Einrichtung und Veränderung solcher zweyer Columnen, sich die Mühe beschwerlicher Berechuungen in sehr hohem Grade zu erleichtern. In den folgenden Exempeln stehen die Zahlen, welche gleich Anfangs in den Columnen waren, über dem Querstriche; diejenigen aber, welche anstatt der ausgelöschten hingesetzt wurden, stehen unter demselben.

Erstes

Erstes Exempel.

		9	
	~~48~~	15	
	~~16~~	~~17~~	wegen 34 ausgelöscht.
	~~34~~	~~48~~	
	7	~~8~~	wegen 16 ausgelöscht.
wegen 34 gesetzt	2		
wegen 16 gesetzt	2		

$$R = \frac{9 \times 15}{28} = \frac{135}{28} = 4\tfrac{23}{28}$$

Zweytes Exempel.

(wegen 15 ausgel.)	~~5~~	~~15~~	
(wegen 8 ausgel.)	~~8~~	~~44~~	
	~~33~~	~~100~~	ausgel. gegen 100
	~~100~~	~~96~~	
(wegen 96 ausgel.)	~~12~~	9	
(wegen 33 gesetzt u. wegen 3 ausgel.)	~~3~~	~~3~~	wegen 15 gesetzt, und wegen 3 ausgel.
		4	wegen 44 gesetzt.
		~~8~~	wegen 96 gesetzt, u. wegen 8 ausgel.

R = 36.

Wenn in einer der Columnen irgend ein Factor ein Bruch seyn sollte; so darf man nur den Nenner unter die Factoren der andern Columne verweisen. Denn der Nenner, der unter irgend einer Zahl in der Hauptcolumne steht, dividirt diese Zahl oder diesen Factor, und folglich die ganze

ganze Hauptcolumne, und gehört daher unter die zuletzt dividirenden Factoren. Hingegen der Nenner, derunter einer in der Divisionscolumne vorkommenden Zahl steht, dividiret diese Columne, wodurch man zuletzt dividiren soll, und ist daher eben so gut, als ein multiplicirender Factor. Daher sind beyde folgende Exempel gleich.

	8		8
12	—$\frac{3}{4}$	12	3
—$\frac{2}{5}$	50	2	50
30	6	30	6
		4	5

Die beyden letzten Zahlen 4 und 5 sind die beyden versetzten Nenner. Wenn daher unreine Zahlen vorkommen; so richte man sie vorher zu Brüchen ein, und versetze alsdann die Nenner, wie vorher. Folgende beyde Exempel sind also gleich.

	12		12
18	$9\frac{3}{4}$	18	39
$6\frac{1}{5}$	20	31	20
		4	5

Man hat bey dieser Columnen-Aenderung oftmals eine vielfältige Wahl, welche Zahlen aus beyden Columnen man durcheinander aufgehen lassen, oder auch durch einerley Zahl harmonisch dividiren wolle. Hierdurch wird die Untersuchung schwer gemacht, ob man sich im Auslöschen und Hinsetzen anderer Zahlen nicht versehen habe. Das beste Mittel ist, daß man die Rechnung 2 oder 3 mahl wiederhole.

§ 89.

§. 89.

Es ist klar, daß man oftmals Vortheil davon habe, diese Columnenrechnung anzuordnen, wenn man viele Brüche oder unreine Zahlen durcheinander multipliciren oder dividiren soll, z. E. Wenn $\frac{5}{6} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{10} \times 7\frac{3}{20}$ dividirt werden soll durch $\frac{7}{12}$; so wird man Vortheil von folgender Anordnung in den Columnen haben.

~~6~~	~~5~~
~~8~~	~~3~~
7	5
~~10~~	3
20	143
7	~~12~~
2	3
2	
2	

Doch eben hieraus ist zu sehen, daß der Vortheil nicht allemal sehr beträchtlich sey. Weil er es aber oft ist, und man nicht eher sieht, ob er es in diesem Falle seyn werde: so hat man allemal Recht, es zu versuchen.

Wenn wir eine Productrechnung anzustellen haben, das ist, wenn uns ein Product durch alle seine Factoren bekannt ist, und wenn wir ferner wissen, daß ein ander Product, wovon ein Factor uns unbekannt ist, jenem Producte gleich sey; so haben wir von der Columnen-Rechnung oftmals Vortheil, z. E. Wie viel Arbeiter braucht man, um in 20 Wochen 1000 Ruthen Pflaster zu machen,

chen, wenn 12 Arbeiter in 6 Wochen 200 Ruthen verfertigen? Der hiebey nöthige Proportionalsatz ist folgender: Wie sich verhält 200 (Ruthen) zu (6 x 12); so verhält sich 1000 Ruthen zu (20 x Z). Es ist Z die gesuchte Zahl der Mannschaft. Also ist das Product der äussersten Glieder, oder (200 x (20 x Z)) vermöge der Proportion, gleich dem Producte der Mittelglieder, oder dem Producte (6 x 12) x 1000. Diese Producte zeige man durch die zwey Columnen an, wovon diejenige, worinneu der unbekannte Factor Z ist, die Divisionscolumne seyn muß. Denn wenn man die Hauptcolumne durch die bekannten Factoren der Nebencolumne dividirt; so muß der eine unbekannte Factor der Quotient seyn. Wer also in der Columnenrechnung geübt ist, wird die vorgelegte Frage auf folgende Art auflösen.

Z	6
~~200~~	~~12~~
~~20~~	~~1000~~
	3

Antwort 18 Arbeiter.

Nirgend schafft die Columnenrechnung, oder die Reesische Regel grössere und öftere Vortheile, als wenn man **den Namen einer benahmten Zahl durch eine lange Kette von Comparations-Zahlen verändern muß**, welches in Wechselreductionen sehr gewöhnlich ist. z. E. Wenn der Ducat von gewisser Art 5 Gulden 4 Stüver Courant gilt, und dieses Courant 5 Procent schlechter ist, als Banco, und 50 Stüver Banco 1 Tha-

ler Banco machen, und wenn endlich der Wechsel so steht, daß 400 Thaler Banco so gut sind, als 533 Leipziger Thaler: was machen alsdann 1000 Ducaten aus, wenn man Leipziger Thaler dafür haben will? Ein jeder sieht, die ganze Rechnung bestehe in der Nahmenänderung der 1000 Ducaten, welche vermittelst der nöthigen Multiplication und Division durch die Comparationszahlen erstlich holländisch Courant in Stüver, hernach holländisch Banco in Stüvern, hierauf Bancothaler, endlich Leipziger Thaler werden. Die Berechnung also, wenn sie nicht völlig angestellt, sondern nur bezeichnet wird, ist, 1000 $\times\frac{104}{1}\times\frac{100}{105}\times\frac{1}{50}\times\frac{533}{400}$. Man setze alle multiplicirende Factoren, nemlich die Zähler in die Hauptcolumne, man setze alle dividirende Factoren, nemlich die Nenner, in die Nebencolumne; so hat man folgende Columnenrechnung:

		1000 Ducaten
1 Ducat	- -	104 Stüver C.
105 Stüv. C.	-	100 Stüver B.
50 Stüv. B.	- -	1 Thl. B.
400 Thl. B.	- -	533 Leipz. Thl.

Man findet das Resultat oder r, welches 2639 Thaler und fast 15 Groschen ist, durch weit kleinere Multiplication und Division, als wenn man die 1000 Ducaten durch die gesagten Brüche, nach der Reihe multiplicirte, oder jede Nahmenänderung durch eine besondre Anwendung der Regel Detri verrichten wollte. Denn, woferne wir nach der obigen Anweisung alles nach Möglichkeit

in

in diesem Columnen-Exempel auslöschen, oder harmonisch dividiren; so behalten wir zuletzt in der Hauptcolumne nur noch 533x2x26x2, oder 55432, welches Product nur durch 21, (weil diese Zahl allein in der Divisionscolumne nachbleibt,) dividirt werden muß, um das Resultat oder Facit zu finden.

Weil nun bey jeder Nahmenänderung, durch die gleichnahmige Comparationszahl dividirt, und durch die ungleichnahmige multiplicirt werden muß: so ist klar, erstlich, daß die erste benahmte Zahl, (deren Nahme verändert werden soll,) ganz oben in der Hauptcolumne stehe, und darauf die gleichnahmige Comparationszahl in der Nebencolumne, hingegen die ungleichnahmige in der Hauptcolumne ihren Platz habe; und daß darauf wieder (wenn mehr Nahmenänderungen nöthig sind,) die gleichnahmige zur Linken, die ungleichnahmige zur Rechten gesetzt werde; und ferner abermals die gleichnahmige zur Linken, die ungleichnahmige zur Rechten; (u. s. w.) bis man endlich zur Rechten, oder in der Hauptcolumne denjenigen Nahmen der allerersten Quantität erreicht, den man durch die Nahmenänderung erreichen wollte.

Diejenigen Lehrer der Arithmetik, welche diese Rechnungsart billigen werden, sehen ohne mein Erinnern ein, daß die Lernenden, in dieser Nahmenänderung durch lange Ketten von Comparationssätzen, bey allerley Münzen, Maaße und Gewicht, sehr geübt werden müssen, wenn der Unterricht ihnen alles erleichtern soll, was sie durch

 eigenes

eigenes Nachdenken selbst finden würden. Die Verwandelung des Brutto in Netto, (und umgekehrt,) die Verwandlung des ganzen Capitals in das, durch Rabatt abgekürzte, oder in das durch Verlust verminderte, oder in das durch Gewinn vergrösserte Capital, (und umgekehrt), alles dieses, sage ich, sind Nahmenänderungen, und lassen sich durch die Columnenordnung oft auf eine vortheilhafte Art berechnen, wie der Erfolg zeigen wird.

§ 90.

Man mache es zur Regel, einen gegebenen Proportionalsatz allemal in dem indirecten Ausdrucke, oder in der indirecten Ordnung, zu denken oder aufzusetzen. Dieses ist zwar nicht unumgänglich nothwendig, aber doch, wenn man die Columnenrechnung anwendet, darum rathsam, weil alsdann die Benennung, in welcher das gesuchte vierte Glied erscheinen soll, zu allerletzt in der Multiplicationscolumne geschrieben wird, welches uns auch zum Zeichen dient, daß die Columnenanordnung geendigt sey.

Wenn ein solcher indirecter Proportionalsatz (z. E. wie 100 ℔ zu 12 Rthlr.; so 25 ℔ zu U Rthl. oder zu 3 Rthl.) schon völlig formirt ist; so hat erstlich das erste und dritte Glied, und ferner das zweyte und das gesuchte vierte Glied, unter einander ganz einerley Benennung.

Sollte der Satz aber nicht formirt seyn; so hat doch das erste und dritte Glied einerley Generalbenennung, und gleichfalls muß man an den Zahlen, die das zweyte und vierte Glied ausmachen,

einerley Generalbenennung antreffen. Wird in jenem Paare Glieder beyderseits vom Gewichte geredet; so redet man in diesem Paare Glieder beyderseits vom Gelde, oder umgekehrt. Ist dort beyderseits von Interessen die Rede; so wird hier beyderseits Capital verstanden, oder umgekehrt. Sind jene Glieder beyderseits Netto, so sind diese beyderseits Brutto, oder umgekehrt. Ist dort beyderseits Rabatt; so ist hier beyderseits Hauptcapital, u. s. f. Z. E. Ist dort beyderseits Ausgabe; so ist hier beyderseits Einnahme.

Wenn man einen formirten Proportionalsatz hat, und das vierte Glied sucht; so setze man in der Haupt- oder Multiplicationscolumne das dritte Glied oben an, und in der zweyten Zeile, und zwar in der Divisionscolumne zur Linken, habe seinen Platz das erste Glied, welches dem dritten gleichnahmig ist; hingegen werde das zweyte, welches mit dem gesuchten vierten Gliede einerley Nahmen hat, in der Multiplicationscolumne grade unter dem dritten Gliede gesetzt. Wenn man alsdann columnenmäßig, (oder nach der Reesischen Regel) rechnet; so ist das Resultat die verlangte vierte Proportionalzahl. Denn man hat das Product des dritten und zweyten Proportionalgliedes durch das erste dividirt. Damit man aber wisse, welche Benennung das vierte Glied haben solle; so setze man das Wort, welches diese Benennung ausdrückt, oder den Anfangsbuchstaben, in der Divisionscolumne oben an. Es sey die Aufgabe: Wie $4\frac{3}{8}$ ℔ zu $6\frac{5}{16}$ Rthlr.; so $10\frac{5}{8}$ ℔ zu U Rthlr.; so setze man

— Rthlr.

			— Rthlr.	85
			8	41
— Rthlr.	$10\frac{5}{8}$ ℔	oder	6	8
$4\frac{3}{8}$ ℔	$6\frac{5}{6}$ Rthlr.		35	

Wenn man hier gehörig auslöscht, und wieder setzet; so muß man zuletzt 697 durch 42 dividiren, und man findet die vierte Proportionalzahl $16\frac{25}{42}$ Rthlr.

Man sieht, daß, wenn man nur mit einem einzigen formirten Proportionalsatze beschäftigt ist, durch die Reesische Columnenrechnung, weder auf kürzere noch längere Art, als gewöhnlich ist, gerechnet werde; aber man hat doch Ursache gnug, die Jugend daran zu gewöhnen, weil diese Art, in den unformirten Proportionalsätzen zuweilen grosse Vortheile verschaft, und weil die Gewohnheit, die Proportionalexempel gleichförmig aufzusetzen, allerdings nützlich ist.

Wenn in einem solchen Proportionalsatze, welchen man auf einmal formiren, und als formirt ausdrücken will, irgend ein Glied zugleich solche Zahlen hat, die theils grössere theils kleinere Einheiten anzeigen, z. E. 2 Rthlr. 18 Groschen, oder 15 ℔ 4 Loth; so müssen die Theile eines solchen Gliedes vorher unter einen Nahmen gebracht werden, z. E. $2\frac{3}{4}$ Rthlr. oder $15\frac{1}{8}$ ℔.

§. 91.

Wenn Resultate zweyer Columnenrechnungen durch einander zu multipliciren sind; so machen das erste Paar der Columnen, und das zweyte Paar der Columnen, nur zwey Columnen aus,

aus, indem die beyden Hauptcolumnen, (als die Zähler der durcheinander zu multiplicirenden Brüche) durcheinander multiplicirt, und also eine unter die andere gesetzt werden. Eben dieses geschicht mit den Nebencolumnen. Sie werden als Nenner dieser Brüche, die durcheinander zu multipliciren sind, unter einander gesetzt. Soll man multipliciren

```
            a
      b - - - c   durch   g - - f
      d - - - e           i - - h
                          k
```

so setze man

```
                  a
            b - - - c
            d - - - e
            g - - - f
            i - - - h
            k
```

Wird aber das Resultat einer Columnenrechnung durch ein anderes dividirt; so kehre man in dem letztern, beyde Columnen so um, daß die Hauptcolumne in die Nebencolumne, und die Nebencolumne in die Hauptcolumne verwandelt werde, und durch diese umgekehrten Columnen multiplicire man das erste in Columnen geschriebene Resultat, wie vorher. Denn durch den Nenner eines solchen Bruchs, der ein Divisor ist, wird das Dividendum, (und also der Zähler, wenn auch das Dividendum ein Bruch ist,) multiplicirt; und durch den Zähler eines solchen Bruchs, der ein Divisor ist, wird das Dividendum dividirt, oder wird der Nenner desjenigen Bruches, der das Dividendum ist, multiplicirt. Wenn also dividirt werden soll

b - - a

b - - - a				e
d - - - c	durch		g - - -	f
			i - - -	h

so setze man

b - - - a
d - - - c
e - - - g
f - - - i
h

§ 92.

Wenn ein gegebener Proportionalsatz unformirt ist; so setze man oben in der Multiplicationscolumne das dritte Glied, und daneben den Nahmen des vierten; alsdann verwandle man, wo es nöthig ist, den Nahmen dieses dritten Gliedes, vermittelst der Columnen, bis er dem Nahmen des ersten Gliedes ähnlich werde. Alsdann hat man das wahre dritte Glied, nemlich in seiner rechten Benahmung, als ein Resultat in Columnen gesetzt. Ist dieses geschehen; oder bedarf das dritte Glied keiner Verwandlung; so schreibe man in der folgenden Zeile auf der Divisionsseite das dem dritten gleichnahmige erste Glied, und auf der Multiplicationsseite das gegebene zweyte Glied. Denn das dritte soll durch das zweyte multiplicirt, und durch das erste dividirt werden. Ist nun der Nahme des gegebenen zweyten Gliedes dem Nahmen des gesuchten vierten Gliedes gleich; so ist die ganze Anordnung in Columnen geschehen. Ist aber das zweyte Glied dem vierten ungleichnahmig; so

so verwandle man den Nahmen des zweyten Gliedes durch die Comparationszahlen, bis der Nahme des vierten Gliedes erreicht wird. Dieses geschicht, wie oben (§. 89.) gezeigt worden, wenn man jedesmal die gleichnahmige Comparationszahl in der Divisionscolumne, und die ungleichnahmige Comparationszahl in der Multiplicationscolumne schreibt. Und weil durch dieses zweyte Glied, dessen neuen Nahmen man sucht, das dritte Glied, folglich die Columne, die gleich Anfangs die Multiplicationscolumne war, soll multiplicirt werden; so ist die Multiplicationscolumne dieser Nahmenänderung, auch die Multiplicationscolumne der ganzen Proportionalrechnung; und die Divisionscolumne dieser Nahmenänderung ist auch die Divisionscolumne der ganzen Proportionalrechnung; daher man in denselben Columnen zu schreiben fortfahren muß, bis zuletzt in der Multiplicationscolumne der gesuchte Nahme erreicht, und die ganze Anordnung in Columnen geendigt wird. Alsdenn hat man noch durch Auslöschen und Setzen sich die Multiplication jeder Columne, und die Division der Hauptcolumne durch die Nebencolumne zu erleichtern.

Es sey z. E. die Frage, wie theuer man ein ℔ Netto in Hannover verkaufen müsse, wenn 56 ℔ Brutto in Amsterdam 48 Thaler Amsterd. Banco kosten, und 40 Procent gewonnen werden sollen? Man weiß auch, daß in Hannover 100 ℔ Brutto 90 ℔ Netto machen, ferner, daß 98 ℔ Amsterdammer Gewicht, so schwer sind, als 102 ℔ Han-

növerisch, und daß 100 Thaler Amsterdammer Banco 132 Thaler Hannöverisch gelten.

Der gegebene Proportionalsatz ist also dieser: Wie sich verhält 56 ℔ Amsterd. Brutto, zu 48 Thaler Amsterd. Banco: so verhält sich 1 ℔ Hannöverisch Netto, zu der Zahl U an Hannöverischen mit Gewinn vermischten Groschen. Die Anordnung in Columnen ist folgende:

(Groschen mit Gewinn)	1 ℔ Hann. Netto.
90 ℔ Hann. Netto	100 ℔ Hann. Brutto.
102 ℔ Hann. Brutto	98 ℔ Amst. Brutto.
56 ℔ Amsterd. Brutto	48 Thal. Amst. B.
100 Thal. Amst. B.	132 Thaler Hannöv.
1 Thal. Hannöv.	24 Gr. ohne Gewinn.
100 Groschen ohne Gew.	140 Gr. mit Gew.

Hieraus wird

9 - - -	10
51 - - -	49
7 - - -	6
25 - - -	33
1 - - -	24
5 - - -	7

Hieraus wird abermals, wenn man 7 gegen 7 weglöscht; wenn man 5 weglöscht, und für 10 die Zahl 2 setzt; wenn man für 9 und 6 die Zahlen 3 und 2 setzet; es wird, sage ich, folgendes:

3 - - -	2
51 - - -	49
- - - -	2
25 - - -	33
1 - - -	24

Noch

Noch läßt sich 3 in der Divisionscolumne wegnehmen, und anstatt 24 in der Hauptcolumne 8 setzen; alsdann bleibt in der Hauptcolumne 2 x 49 x 2 x 33 x 8, oder zusammen 51744. In der Divisionscolnmne bleibt 51 x 25 oder 1275. Also ist das Resultat, oder die gesuchte vierte Proportionalzahl in dem verlangten Nahmen, $\frac{51744}{1275}$ Groschen, oder $40\frac{744}{1275}$ Groschen, das ist 40 Groschen und etwas über 7 ₰.

§. 93.

Man hat Recht, das Suchen der vierten Proportionalzahl in allen Fällen anzusehen als eine beständige Nahmenänderung des dritten Gliedes, bis der Nahme, den das vierte Glied haben soll, erreicht wird. Denn in beyden Fällen wird eben dieselbe Zahl in der Multiplicationscolumne oben angesetzt; man mag die Rechnung als eine Nahmenänderung, oder als eine Proportionalrechnung betrachten. In beyden Fällen muß man immer Comparationszahlen, oder bekannte Verhältnisse von benahmten Zahlen, so unter einander setzen, daß, wenn ein Nahme A zuerst in der Multiplicationscolumne zur Rechten steht, hierauf derselbe Nahme A zur Linken, und ein neuer Nahme B zur Rechten; derselbe Nahme B zur Linken, ein neuer Nahme C zur Rechten; derselbe Nahme C zur Linken, ein neuer Nahme D zur Rechten folge, bis zuletzt der gesuchte Nahme die Multiplicationscolumne zur Rechten endiget.

Wenn man also eine benahmte Zahl sucht, die sich nach einer bekannten benahmten Zahl Z so richtet,

tet, wie ein aus andern benahmten Zahlen bekanntes Verhältniß anzeigt; so verfahre man mit der Zahl Z, in der Columnenrechnung eben so, als wenn man sie in eine anders benahmte Zahl verwandeln wollte, z. E. Wenn A der erste Nahme der Zahl Z ist, und B, C, D, und so weiter, neue Nahmen sind, wodurch man Z durchführt; so setze man

Divisionscolumne.	Multiplicationscol.
(Der Nahme der gesuchten Zahl)	Die Zahl Z, benahmt durch A
Comparationszahl ben. durch A.	Comparationszahl ben. durch B.
Comparationszahl ben. durch B.	Comparationszahl ben. durch C.
Comparationszahl ben. durch C, u. s. w.	Comparationszahl ben. durch D, u. s. w.

Alsdann, wenn der Nahme der gesuchten Zahl erreicht ist, verkleinere man nach Möglichkeit die beyden Columnen durch harmonische Division. Ist dieses geschehen; so mache man aus der Hauptcolumne ein Product. Dieses dividire man durch das aus der Nebencolumne entstehende Product. Das Resultat ist alsdann die gesuchte Zahl. Und diese Ordnung im Rechnen, wovon das Exempel (§. 92.) gezeigt ist, nennt man die **Reesische Kettenregel**, oder die **Columnenrechnung.**

Fragen

Fragen an die Lernenden über die Hauptsätze der Rechenkunst.

Erstes Hauptstück.

Die allgemeinen Grundsätze der Rechenkunst.

§. 1. Was bedeutet Eins oder eine Einheit?

§. 2. Gebt Exempel von vergleichbaren Grössen.

§. 3. Was ist eine Zahl? Wie darf man unvergleichbare Grössen in Vergleichung setzen? Sind alle Einheiten gleich? Gebt ein Exempel einer Einheit, die zugleich eine Zahl ist?

§. 4. Was ist eine Principaleinheit? Was ist mehr als Eins? Was ist weniger als Eins?

§. 5. Was ist ein Bruch? Was ist eine gebrochene Einheit? Was zeigt der Nenner? Was zeigt der Zähler?

§. 6. Was heißt ein Grundsatz?

§. 7. Was bedeutet das Wort Theil und das Wort Ganzes? Wovon ist die gebrochene Einheit ein Theil? Ist jeder Bruch ein Theil einer Principaleinheit? Saget die Grundsätze von dem Ganzen und seinen Theilen?

§. 8. Wie sind Integralzahlen und Brüche unterschieden? Wann ist die Principaleinheit oder Integraleinheit benahmt? Wann ist die gebrochene

brochene Einheit benahmt? Wann ist der ganze Bruch benahmt? Gebt Exempel von unbenahmten Zahlen.

§. 9. In welcher Wissenschaft lehrt man die allgemeinen Wahrheiten von unbenamten Zahlen?

§. 10. Gebt Exempel von einer arithmetisch benahmten Zahl? Gebt Exempel von Zahlen die gleiche Zahl würde haben; auch von solchen, die ungleiche Zahl würde haben. Nennet eine Zahl, worbey eine zwiefache Zahl vorkömmt?

§. 11. Worzu braucht man in der Rechenkunst die Buchstaben? Was heißt 3 A, 5 B, wenn A einen Thaler, B einen Groschen bedeutet? Was heißt 3 A, 2 B, wenn A, 4, und B, 5 bedeutet? Was heißt 2 A, 3 B, wenn A Hundert, und B Zehn bedeutet? Was heißt die Redensart: 2 G ist grösser als 2 K, wenn G eine jede grössere Zahl, und K eine jede kleinere Zahl andeutet? Was heißt alsdann die Redensart: Z G ist grösser als Z K, wenn Z in beyden Fällen eine jede zweymal wiederholte Zahl anzeigt? Was heißt die Redensart: 2 G giebt G, wenn G eine jede grade Zahl bedeutet? Was heißt die Redensart: G nebst U giebt U, wenn G eine gerade Zahl, U eine ungrade bedeutet?

§. 12. Was schliesset ihr, wenn ihr wißt, daß B und C und D unter einander gleich sind, und daß A einem derselben gleich sey? Was schliesset ihr, wenn ihr wißt, daß A dem B gleich sey, und daß dort und hier durch gleichen Zusatz, oder durch gleiche Abnahme zwey neue

neue Zahlen oder Grössen entstanden sind? Was schliesset ihr, wenn ihr wißt, A sey grösser als B, und wenn dort und hier durch gleichen Zusatz, oder durch gleiche Abnahme, zwey neue Zahlen, nemlich C und D entstanden sind; ich frage, ob C oder D grösser sey? Was schliesset ihr, wenn ihr wißt, daß A und B gleich sind, und daß dort durch einen kleinern Zusatz, hier durch einen grössern Zusatz 2 neue Zahlen, nemlich C und D entstanden sind, ich frage, ob C oder D kleiner sey? Was schliesset ihr, wenn ihr wißt, daß A und B gleich sind, und daß dort durch kleinere Abnahme, hier durch grössere Abnahme, 2 neue Zahlen, nemlich C und D entstehen; ich frage, ob C oder D grösser sey? Was schliesset ihr, wenn ihr wißt, daß die beyden Ganzen A und B gleichviel Theile haben, und immer ein dortiger Theil mit einem hiesigen Theile an Grösse harmonirt? Zeigt durch ein Zeichen an, daß A gleich sey dem B, oder daß 4 so viel sey, als IV! Was dürft ihr thun, wenn ihr wisst, daß zwey Zahlen gleich, oder daß sie mit Wahrheit, durch das Zeichen der Gleichheit verbunden sind? Bemerket durch ein zwiefältiges Zeichen, daß A grösser sey als B, oder daß B kleiner sey als A, daß 9 grösser sey als 7. Was schließt ihr, wenn ihr wißt A, B, C, D, seyn unter einander gleich, und G sey grösser, als eins derselben, oder kleiner, als eins derselben? Was schließt ihr, wenn ihr wißt, daß A, B, C, D, eine auf-

steigende

steigende Reihe von immer grössern Zahlen sey, und daß G grösser wie D sey, oder auch, daß H kleiner als A sey?

§. 13. Worzu braucht man in derselben Rechnung gleiche Buchstaben? Worzu braucht man vornehmlich die ersten, und worzu die letzten Buchstaben des Alphabets?

§. 14. Ist die Ordnung der Theile im Ganzen gleichgültig oder nicht?

§. 15. Was heißt Addiren? Schreibt die Nebentheile A, B, C, mit dem Zeichen der Addition? Ist A†B+C eben so viel, als B† C†A? Dürft ihr die Summe, und die durch (†) verknüpfte Nebentheile mit einander verwechseln? Werden allerley Zahlen mit einander addirt? Wie wird ein Bruch geschrieben?

§. 16. Was heißt der Unterschied zweyer Zahlen? Wie nennt man den Unterschied auch anders? Wodurch wird gleicher Zahlen Differenz ausgedrückt? Wann heißt die Differenz ein Rest? Was heißt Subtrahiren? Welche Zahl heißt die Haupt-Summe, welche der Abzug? Bemerket durch ein Zeichen, daß ihr 9 als die Hauptsumme, 5 als den Abzug ansehen, und also subtrahiren müßt? Was bedeutet 9—4? Was bedeutet A—C, wenn A um 2 grösser ist als C? Dürft ihr die Differenz, und die, durch (—) mit dem Abzuge verknüpfte Hauptsumme mit einander verwechseln? Geschicht die Subtraction zwischen allerley Zahlen? Welchem Neben-

theile

theile der Hauptsumme ist die Differenz gleich? Addirt Abzug und Differenz, was kömmt? Subtrahirt von der Hauptsumme den Rest, was kömmt?

§. 17. Ist (A+B+C)—D eben so viel, als (A—D)+C+B, oder als C+B—D+A?

§. 18. Welche Addition und Subtraction heben einander auf? Schreibet anstatt 4 A—C—2 A+3 C, etwas Gleiches das kürzer ist? Warum dürft ihr anstatt 6—4+8 schreiben 2+8? Was heißt die Universaladdition?

§. 19. und 20. Drücket die Zahl 6 algebraisch aus, und zwar auf verschiedene Art? Welches Zeichen muß man immer hinzudenken, wenn der erste Theil einer algebraischen Zahl kein ausdrückliches Zeichen hat? Welche Zahlen heissen in der algebraischen Zahl positiv, welche heissen negativ? Wie sind die positiven Zahlen des Abzuges anzusehen, wenn sie in der Hauptsumme stehen sollen? Wie sind die negativen Zahlen des Abzuges anzusehen, wenn sie in der Hauptsumme stehen sollen? Wie muß man die Universalsubtraction verrichten? Nehmt eine algebraisch ausgedrückte Differenz, z. E. 9—5, addirt dort und hier gleichviel, oder subtrahirt dort und hier gleichviel, was kömmt?

Zweytes Hauptstück.

Von der Decimalordnung, und von der Ausübung der Addition und Subtraction bey reinen Integralzahlen.

§. 21. Gilt eine Ziffer immer gleichviel? Was bedeutet 4°? Was bedeutet $4'$? Was bedeutet $4''$? Was bedeutet $4'''$? Was bedeutet 14°? Was bedeutet $14'''$? Was bedeuten g°, g', g'', g'''? Was kann euch anstatt der so übergeschriebenen Zeichen seyn? Was stehen für Ziffern in der Decimalordnung in der Stelle E, in der Stelle Z, in der Stelle H, in der Stelle T, in der Stelle ZT, in der Stelle HT, in der Stelle TT, oder M? Wie viel gilt 1 aus einer gewissen Zahl würde, wenn man es um eine Stelle erniedriget? Worzu dienet die Viceziffer oder Nulle in der Decimalordnung?

§. 22. und 23. Ich will euch Zahlen sagen, schreibt sie. Welche Ziffer drückt Millionen aus? Welche drückt Billionen aus? Ich will euch Zahlen schreiben, sprecht sie aus. Ich will euch grosse Zahlen schreiben, wie müßt ihr sie in Classen theilen, um sie auszusprechen?

§. 24. Wie schreibt ihr eine zusammengesetzte Ziffer, wenn ihr sie euch als eine einfache, die über 9 ist, vorstellen wollt? Seht einmal nach, ob $804 = 8'' + 4^{\circ} = 6'' + (20') + 4^{\circ} = 4'' + (40') + 4^{\circ} = 4'' + (38') + (24^{\circ}) =$

$7'' + 8' + (24^\circ) = 7'' + (10') + 4^\circ = 8'' + 4^\circ = 804$, und andere dergleichen Zahlen?

§. 25. Was müßt ihr thun, wenn ihr theils grosse, theils solche Nebentheile, welche nur Einel sind, zusammen addiren sollt? Wie bereitet ihr euch zur Addition durch Untereinanderschreibung grosser Nebentheile? Hier sind so geschriebene Nebentheile, macht Particulärsummen; fangt entweder von vorne oder von hinten an; schreibt sie, wenn es nöthig ist, vermittelst der Parenthese, an der gehörigen Stelle in der Decimalordnung; und verbindet die Particulärsummen durch das Zeichen (+)? Hier ist eine solche Anzahl von Particulärsummen; setzt etwas Gleiches an ihrer Statt, so daß die Parenthesen wegfallen? Hier sind viele Nebentheile, addirt sie auf die kürzeste und gewöhnlichste Art?

§. 26 u. 27. Wenn eure Nebentheile allesammt sich mit gewissen Nullen schliessen, mit wie viel Nullen schließt sich denn gewiß die Hauptsumme? Was nennt man eine harmonische Addition? Wenn in der harmonischen Addition der oft wiederholte Nebentheil sich mit einer gewissen Anzahl von Nullen schließt, wie viel Nullen hat wenigstens am Ende die Hauptsumme? Welche Zahl heißt bey der harmonischen Addition die Hauptzahl; welche die Nebenzahl? Addirt harmonische Theile; macht ein neues Exempel, worinnen die vorige Hauptzahl zur Nebenzahl, und die vorige Nebenzahl zur Hauptzahl wird;

 wißt

wißt ihr nicht vorher, wie die Summe seyn werde? Wenn bey der harmonischen Addition die Nebenzahl sich mit gewissen Nullen endiget, wie viel wird alsdann die Hauptsumme am Ende haben?

§. 28. Schreibt zur Vorbereitung der Subtraction eine Hauptsumme und den Abzug untereinander! Wann findet ihr gar keine Schwierigkeit, die Subtraction sowohl von vorne als von hinten anzufangen? Welche ist die Schwierigkeit? Versteht ihr durch Versetzung eine jede zu kleine Ziffer der Hauptsumme so zu vergrössern, daß sie nicht kleiner bleibe, als die darunter stehende Ziffer des Abzuges; so thut dieses in den Exempeln, die ich euch geben will? Fangt von hinten an, zu subtrahiren; verrichtet die nöthigen Versetzungen durch blosse Puncte, und subtrahirt in Exempeln, die ich euch geben will, auf die kürzeste und gewöhnlichste Art? Versucht es aber doch, auch von vorne durch Hülfe der Puncte, die Subtraction anzufangen und fortzusetzen?

Drittes Hauptstück.

Von der Multiplication und insonderheit bey reinen Integralzahlen.

§. 29. Was bedeutet es, wenn man sagt, daß eine Zahl soll einer andern gemäß gesetzt werden? Was bedeutet es, einen Bruch von einer Zahl zu setzen, oder die Zahl dem Bruche

che gemäß zu setzen? Welches ist der Hauptfactor, welches ist der Nebenfactor? Was heißt Multipliciren? Welche Zahl nennt man das Product? Schreibt Producte durch das Multiplicationszeichen und durch die Factoren, sowohl in Zahlen, als in Buchstaben.

§. 30. bis 35. Wann ist die Multiplication eine harmonische Addition? Werden nur Integralzahlen durch einander multiplicirt? Was bedeuten drey oder mehr neben einanderstehende Factoren? Saget das sogenannte Einmal Eins. Mit wie viel Nullen schließt sich das Product, wenn der Factor Nullen hat?

§. 36. bis 38. Nennet mir die Rangeinheiten nach der Ordnung ihrer Zahlwürde? Wie multiplicirt ihr durch eine Rangeinheit? Wie durch eine einfache Ziffer? Rechtfertiget euer Verfahren dabey. Was ist eine Rangzahl? Wie multiplicirt ihr durch dieselbe?

§. 39. bis 42. Ich will euch grosse Zahlen geben, multiplicirt sie durch einander. Wie verfahrt ihr, wenn der eine Factor eine zusammengesetzte Rangzahl ist, oder wenn beyde Factoren von dieser Art sind; auch wenn Nullen in der Mitte des Factors stehen?

§. 43. Multipliciret in zweyen Fällen gleiches durch gleiches, was kömmt? Wenn zwey gleiche Producte sind, und ein hiesiger Factor einem dortigen gleich ist, wie verhalten sich denn die beyden andern Factores? Multipliciret in zweyen Fällen Gleiches durch Ungleiches, welches Product ist grösser? Mul-

tipliciret Ungleiches durch Gleiches, welches Product ist kleiner?

§. 44 u. 45. Wißt ihr mit Einsicht, daß, wenn man den Hauptfactor zum Nebenfactor macht, das Product dadurch nicht verändert werde? Wißt ihr mit Einsicht, daß es einerley sey, ob man ein Product C D ferner durch X multiplicire, oder ob ihr erst das Product C X machet, und alsdann mit D multipliciret; oder ob C durch das Product X D multiplicirt werde? Wißt ihr mit Einsicht, daß, wenn der Factoren viele sind, die Ordnung und Verbindung derselben in unsrer Willkühr stehe, ohne das Product zu verändern?

§. 46. Was ist die Universalmultiplication? Wenn ihr Positives durch Positives multiplicirt, wie wird das Product? Welches Product entsteht, wenn Positives durch Negatives, oder Negatives durch Positives multiplicirt wird? Wie aber, wenn beyde Factoren negativ sind, welcherley Product bekömmt man alsdann?

Viertes Hauptstück.

Von der Division und den Brüchen.

§. 47 bis 49. Was ist Dividiren? Was ist das Dividendum, der Divisor und der Quotient? Kennt ihr das Divisionszeichen? Was kömmt, wenn man das Dividendum oder Product durch den Quotienten dividirt? Was aber, wenn in zweyen Fällen Gleiches durch Gleiches dividirt wird? Was, wenn man erst

erst multiplicirt, und hernach durch dieselbe Zahl dividirt, oder wenn man erst dividirt, und hernach durch dieselbe Zahl multiplicirt? Wenn das Dividendum aus Theilen besteht, und so getrennt betrachtet wird, wie muß man alsdann dividiren? Ist $\frac{12+6+18}{6}$ so viel, als $\frac{12}{6}+\frac{6}{6}+\frac{18}{6}$?

§. 50 u. 51. Wenn Nennner und Zähler gleich sind, was bedeutet der Bruch? Was, wenn der Zähler kleiner ist? Was, wenn er grösser ist? Wie addirt und subtrahirt man gleichbenahmte Brüche? Wenn der Zähler multiplicirt wird, was geschicht denn dem Bruche? Multiplicirt den Zähler durch eine Zahl, die dem Nenner gleich ist, was bedeutet denn der neue Bruch? Ist die Bedeutung eines Bruchs der Bedeutung eines Quotienten gleich, wenn beyderseits gleiche Ziffern sind? Dividiret Gleiches durch Ungleiches in zweyen Fällen, welcher Quotient ist grösser? Multipliciret oder dividiret eine Zahl durch 1, was kömmt? Ist es einerley, ob man das Product dividire, oder diese Division erst an einem der Factoren verrichte, und sie hernach multiplicire? Denkt denselben Bruch in zweyen Fällen, multiplicirt dort den Zähler, dividirt hier den Nenner, aber beydes geschehe durch einerley Zahl; was urtheilt ihr von den Resultaten? Nehmt abermals denselben Bruch in zweyen Fällen, dividirt dort den Zähler, multiplicirt hier den Nenner durch einerley Zahl, wie sind die beyden Re-

sultate beschaffen? Ist der Bruch nicht anders zu multipliciren, als durch die Multiplication des Zählers? Multiplicirt den Zähler und den Nenner eines Bruchs durch gleiche Zahl, wie ist der neue Bruch beschaffen? Dividirt den Zähler und den Nenner eines Bruchs durch gleiche Zahl, was urtheilt ihr von dem neuen Bruche? Versteht ihr durch Hülfe des Einmal Eins solche Divisionen anzustellen, woben sowohl Divisor als Quotient nicht über 9 ist?

§. 52. Welche sind die 4 Species oder Hauptarten der Rechenkunst? Wie findet ihr anstatt zwey ungleich benahmter Brüche zwey andere von gleichem Inhalte, welche gleichbenahmt sind? Wie addirt man einen Bruch zu einem Bruche? Wie subtrahirt man einen Bruch von einem Bruche? Wie addirt man einen Bruch zu einer Integralzahl? Wie, zu einer unreinen Zahl? Wie addirt man eine unreine Zahl zu einer andern? Wie subtrahirt man einen Bruch von einer Integralzahl? Wie eine reine Zahl von einer unreinen? Wie einen Bruch von einer unreinen Integralzahl? Wie eine unreine von einer andern unreinen Zahl?

§. 53 bis 55. Welche Veränderung versucht man mit jedem Bruche am Ende der Rechnung? Wie dividirt man, wenn das Dividendum kleiner ist, als der Divisor? Wie werden Einheiten, welche kleiner sind, als die Principaleinheit, in die Form eines Bruchs gebracht?

bracht? Wie wird ein Bruch in eine Integralzahl, welche kleinere Einheiten anzeiget, verwandelt? Läßt sich jede Integralzahl als einen Bruch ausdrücken? Wie richtet man eine unreine Zahl Bruchmäßig ein? Auf wie verschiedene Arten läßt sich die Multiplication zwischen einem Bruche und einer Integralzahl vornehmen? Wie die Multiplication des Bruches durch einen Bruch? Wie die Multiplication einer unreinen Zahl durch einen Bruch? Oder, einer unreinen Zahl durch eine reine? Oder, einer unreinen Zahl durch eine andere? Was geschicht dem Bruche, wenn der Zähler dividirt wird? Wie dividirt man den Bruch durch eine reine Zahl? Wie eine reine Zahl durch einen Bruch? Wie einen Bruch durch den andern? Wie eine unreine Zahl durch einen Bruch? Wie wird dividirt, wenn der Divisor unrein ist?

§. 56. Wie dividirt man Rangzahlen durch eine Rangeinheit, welche nicht mehr Nullen als jene hat? Wie dividirt man Rangzahlen durch Rangzahlen? Wie eine jede grosse Zahl durch eine Rangeinheit?

§. 57. und 58. Wie schreibt man bey den grossen Divisionen den Divisor regelmäßig? Wie sieht man, wie viel, in Decimalordnung geschriebene, Theile der Quotient haben werde? Machet das Zeichen der ausübenden Division mit den Puncten? Wie findet man den ersten Theil des Quotienten? Was überzeugt euch, daß der gefundne der rechte sey? Wie

findet ihr den zweyten, den dritten, und die andern Theile des Quotienten? Was macht ihr mit demjenigen Reste, der kleiner als der Divisor ist? Wann ist es besser durch Ausstreichen die Division auszuüben? Wann aber durch die vollständige Hinschreibung der Producte?

§. 59. Welche Zahlen gehen durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25, 100, 1000, u. s. w. auf? Wenn ein Quotient bey der Berechnung eine unreine Integralzahl giebt, und sowohl Zähler als Nenner des kommenden Bruchs durch einerley Zahl aufgehen, was schließt man daraus? Welche Zahl heißt ein gemeinschaftliches Maaß zweyer Zahlen? Wenn eine Zahl durch die andre aufgeht, welche ist alsdann das größte Maaß beyder? Wie finden wir das größte Maaß beyder Zahlen, um einem Bruche den kleinsten Ausdruck zu geben?

§. 60. Was ist die Universaldivision? Wenn das Dividendum und der Divisor beyde positiv sind, welcherley ist denn der Quotient? Wie aber, wenn eins entweder das Dividendum, oder der Divisor negativ ist, wie ist alsdann der Quotient beschaffen? Wie, wenn beydes, das Dividendum und der Divisor, negativ sind?

Das Fünfte Hauptstück.

Von der relativen Multiplication; von der Verwandlung und Berechnung benahmter Zahlen.

§. 61. und 62. Was heißt es, einen Factor zerstreuen? Welches ist die gewöhnliche und absolute Art, durch einen Theil des Factors zu multipliciren? Wie subordinirt man einen folgenden Theil des Factors unter den vorhergehenden? Was heißt die relative Multiplication oder das Ausnehmen? Was hat das Zerstreuen für Schwierigkeit? Wie findet man den subordinirenden Bruch? Wie übt man die relative Multiplication aus? Sagt die memorirten Verhältnisse der Quantitäten?

§. 63. Welche Dinge nennt man gleichartig? Welcherley Product ist jede benahmte Zahl? Welche zwey Zahlen nennt man Comparationszahlen? Wie verwandelt man benannte Zahlen in andere, welche von gleichartigen, aber von kleinern und grössern Einheiten benahmt sind, oder wie verrichtet man die Nahmenänderung?

§. 64. u. 65. Schreibt man am Ende seiner Rechnung grössere, und so viel kleinere gleichartige Einheiten neben einander, welche noch eine Verwandlung in die grössern leiden? Schreibt man am Ende seiner Rechnung einen von grössern Einheiten benahmten Bruch, neben einer

einer Integralzahl von kleinern Einheiten? Wie addirt man benahmte Nebentheile? Wie subtrahirt man benahmte Zahlen? Wenn ein Factor zusammengesetzt ist, aus verschiedentlich benahmten Theilen, und wenn man denselben durch eine unbenahmte Zahl multipliciren soll, wovon hat ein jedes Specialproduct seinen Nahmen? Warum werden oft zwey sehr verschiedentlich benahmte Factoren durch einander multiplicirt? Wie geschicht diese Multiplication? Warum dividirt man eine benahmte Zahl ostmals durch eine andere, welche ganz anders benahmt ist? Mit welcher von den beyden Zahlen ist ein solcher Quotient gleichartig? Wie übt man diese Division aus? Hier sind Exempel von Multiplicationen, welche durch Zerstreuen und Ausnehmen geschehen; verrichtet diese relative Multiplication, und sagt mir jedesmal, warum ihr so verfahret?

Das Sechste Hauptstück.

Von Verhältnissen, Proportionen und Progreßionen insgemein.

§. 66. Wann sind 2 Paar Zahlen harmonisch gesetzt? Wann haben 2 Paar Zahlen ein gleiches arithmetisch Verhältniß, oder wann stehen sie in arithmetischer Proportion, und sind arithmetische Proportionalglieder? Welches ist das Zeichen dieser Proportion? Was ist in derselben ein Doppelglied? Was ist eine arith-

arithmetische Progreßion? Wie verhält sich die Summe der äussersten Glieder in einer arithmetischen Proportion, gegen die Summe der beyden Mittelglieder? Was ist in einer arithmetischen Progreßion ein Glied in Vergleichung mit der Summe der beyden nächsten Glieder zur Linken und Rechten? Stehen in einer arithmetischen Progreßion zwey unmittelbar auf einander folgende Glieder mit einem jeden solchem andern Paare in ar. Proportion? Was urtheilt ihr von regelmäßig excerpirten Gliedern einer ar. Progreßion? Was urtheilt ihr von einer regelmäßig ausgefüllten ar. Progreßion?

§. 67. Was ist die erste, zweyte, dritte Potenz oder Dignität einer Zahl? Was ist insonderheit die Quadratzahl und Kubikzahl? Was ist die erste, zweyte, dritte Wurzel einer Zahl, u. s. w. Was ist insonderheit die Quadratwurzel und Kubikwurzel? Wie verhält sich eine Zahl, ihre erste Wurzel und ihre erste Potenz? Welches ist das Zeichen der Potenzen und Wurzeln?

§. 68. Welches heißt das mittelste Glied in einer ar. Progreßion? Wenn ihr dieses mittelste Glied durch die Zahl der Glieder multiplicirt, was kömmt alsdann für ein Product oder für eine Summe? Wenn ihr die halbe Summe des ersten und letzten Gliedes durch die Zahl der Glieder multiplicirt, was kömmt alsdann für ein Product, oder für eine Summe? Was ist eine zunehmende und abnehmende

mende ar. Progreßion? Wenn die Zahl der Glieder, die Differenz und eines der äussersten Glieder in der ar. Progreßion bekannt ist, was könnt ihr alsdann von selbst finden? Was ist in der Progreßion 1, 2, 3, 4 u. s. w. das halbe Quadrat des letzten Gliedes, oder der Gliederzahl, nebst dem halben letzten Gliede, oder der halben Gliederzahl, für eine Summe? Was ist in der Progreßion 1, 3, 5, 7 u. s. w. das Quadrat der Gliederzahl für ein Product, oder für eine Summe?

§. 69. Wann sind zwey Paar Zahlen geometrische Proportionalglieder; oder wann stehen sie in geometrischer Proportion, oder haben einerley geometrisch Verhältniß? Welches ist das Zeichen dieser Proportion? Was ist ein geometrisch Doppelglied, oder die mittlere geometrische Proportionalzahl? Was ist eine g. Progreßion? Welcher ist der so brauchbare Lehrsatz von dem vierten g. Proportionalgliede? Welchem Producte ist das Product der beyden äussersten g. Glieder gleich? Wie wird das vierte oder letzte g. Glied gefunden? Wie findet man die mittlere g. Proportionalzahl? Was schließt man aus $\frac{g}{h} = \frac{l}{k}$ in Ansehung der Proportion? Was schließt man aus $gk = hl$, in Ansehung der Proportion? Wie verhält sich das erste zum dritten Gliede? Was darf man also für eine Versetzung vornehmen? Was ist die Regel Detri? Wie verhält sich das zweyte zum ersten Gliede?

§. 70.

§. 70. Was ist die harmonische und geometrische Veränderung an zwenen Zahlen? Durch welche harmonische g. Veränderungen an den Gliedern wird die g. Proportion nicht gestört? Wie erleichtert man sich die Anwendung der Regel Detri durch harmonische Division an den Gliedern? Wann ist die harmonische Multiplication an den Gliedern ein Mittel der Bequemlichkeit? Welche Glieder der Proportion heissen harmonisch? Welche Veränderung darf man durch Addition und Subtraction mit 4 Proportionalzahlen vornehmen, ohne die Proportion aufzuheben?

§. 71. Wie richtet man den Platz der Glieder ein, um die Regel Detri bequem auszuüben? Findet zu 12 und $35\frac{1}{4}$ und 296 durch eine zur Uebung angestellte Zerstreuung des zweyten Gliedes, die vierte Proportionalzahl?

Das siebende Hauptstück.

Anwendung des Vorigen zu den Berechnungen im bürgerlichen Leben.

§. 72. Wann muß man Zahlen oder Grössen, welche man vor sich hat, addiren? Wann muß man mit ihnen die Subtraction anstellen? Wann muß multiplicirt werden? Wann geschicht die Namenänderung oder die Verwandlung einer benahmten Zahl in eine gleichartig anders benahmte, vermittelst der blossen Multiplication, durch die ungleich benahmte Comparationszahl? Wann muß man

man dividiren? Wann ist die blosse Division durch die gleichnahmige Comparationszahl zureichend, um eine benahmte Zahl in eine andere gleichartige anders benahmte zu verwandeln? Ist in den Berechnungen der Zweck allemal durch Anwendung einer einzigen Species erreicht? Hat man bey der Regel Detri allemal nur zu multipliciren, oder nur zu dividiren? Hat man bey der Verwandlung der benahmten Zahlen, oder der Namenänderung, allemal nur zu multipliciren, oder nur zu dividiren?

§. 73. Hat man nicht jede Multiplication als eine gewisse Art der Anwendung der Regel Detri anzusehen? Ist die Division nicht auch eine gewisse Art der Anwendung dieser Regel? Ist nicht Namenänderung der benahmten Zahlen ebenfalls eine Anwendung derselben Regel? Zeiget alle Versetzungen der Glieder, welche ohne Störung der Proportion geschehen? Wie macht man es, wenn irgend ein Glied der Proportion, es sey das erste, oder das zweyte, oder das dritte, oder das vierte, unbekannt ist?

§. 74. und 75. Welches ist der Unterschied, unter singulären und gewöhnlichen Proportionen? Wie wird die Grösse eines Stück Tuchs erkannt? Wie findet man die unbekannte Länge oder unbekannte Breite eines Stückes, welches einem andern von bekannter Länge und Breite gleich seyn soll? Ist dabey die Denkart der verkehrten Regel Detri die natürlichste?

Welche

Welche Rechnung dürfte man eine unmittelbare Productrechnung nennen? Wie dient dieselbe zur Erfindung der Breite, Länge, Höhe, Dicke? Wie dient sie zur Erfindung, wenn Waaren theurer oder wohlfeiler geworden sind, z. E. bey der Beckerrechnung? Wie bey einigen Fragen von der Beladung, von der Bezahlung, und von der Länge des Weges der Fuhrleute? Wie bey den Fragen von der nöthigen Zahl der Arbeiter zu einem Werke, oder von der nöthigen Zeit zu ihrer Arbeit, oder von der Grösse des Werks, bey einer gesetzten Zahl der Arbeiter, und bey einer gesetzten Zeit? Wie bey den Fragen von der Menge des Proviants, oder von der Länge der Zeit, oder von der Zahl der Personen, für welche es zureicht? Wie bey der Frage von der Gleichheit des Dienstes, bey gegenseitiger Anleihe verschiedener Capitalien, auf verschiedene Zeitlängen, ohne Interesse? Wie bey der Frage von dem Tausche zweyer Ellen-Waaren von gleicher Güte, aber von ungleicher Breite? Wie bey der Frage von dem Gewichte wohlfeiler oder theurer Waaren, die man gegen einander vertauscht?

§. 76. Wie verschiedentlich berechnet man die Grösse der Arbeit, wenn man zwey solche Grössen vergleichen will? Wie stehen Lohn und Arbeit in solchen Fällen gemeiniglich in Proportion? Drückt man nicht ein und dieselbe Quantität oftmals durch ganz verschiedene Zahlen aus? Auf welcher Dinge Gleich-

heit gründet sich die Proportion? Wenn die Benahmung der beyden ersten Glieder gleich, aber die Benahmung der beyden letzten Glieder nicht gleich ist, wie ist alsdann die vorgegebene Proportion dieser vier Grössen zu verstehen? Warum setzt man bey Annehmung der Proportion oft voraus, daß das erste mit dem dritten Gliede, und das zweyte mit dem vierten Gliede gleichnahmig seyn soll? Was ist eine directe, und was eine indirecte Proportion? Was ist ein Proportionalsatz? Welche Proportionalsätze sind formirt, und welche sind unformirt? Wie muß man die unformirten Proportionalsätze verändern? Welches Gliedes Benennung muß unverändert bleiben?

§. 77. Was sind Comparationssätze? Was ist eine Kette von Comparationssätzen? Wann ist eine solche Kette zur Nahmenänderung einer gewissen benahmten Zahl zureichend? Wie lange versucht man eine gewisse Nahmenänderung vergeblich? Wie wird die Nahmenänderung durch Hülfe der Comparations-Kette angestellt?

§. 78. Was bedeuten die Worte: Dieses Stück Silber wiegt 5 Mark 4 Loth? Was bedeutet die Mark fein? Was bedeutet die Redensart von 10, 11, 12, 13, und 14-löthigem Silber? Wie berechnet man die Quantität des reinen Silbers in einem Stücke, dessen Gewicht und dessen Feinheit oder Löthigkeit man weiß? Wie berechnet man die Feinheit

des zusammengeschmolzenen Silbers oder Goldes, wenn man das Gewicht und die Feinheit jedes Stückes weiß, woraus die Masse zusammengeschmolzen ist, oder woraus die Zusammenschmelzung erst geschehen soll? Wie berechnet man das Verhältniß der Quantität des feinen und des schlechten Silbers oder Goldes, welches man zusammenschmelzen muß, um ein Stück von einer gewissen mittlern Feinheit zu bekommen? Was hat man für eine Wahl, wenn die neue Masse von verlangter Feinheit, aus 3, 4, oder mehr Sorten zusammen zu schmelzen ist?

§. 79. Was bedeuten die Wörter Thara, Brutto und Netto? Welche ist die absolute Grösse der Thara? Welches ist ihre relative Grösse? Was bedeuten die Worte: Von so und so viel Brutto hat man so und so viel Thara, in einschliessender, und was in ausschliessender Bedeutung? Was thut man, um Brutto in Netto, und umgekehrt, zu verwandeln? Wie berechnet man die ganze Thara von einem gewissen Bruttogewicht?

§. 80. Welcher ist der merkwürdige Proportionalsatz von Capitalien und Zinsen, wenn Zeiten und Procente gleich sind? Wie verhalten sich zwey durch Zinsen angewachsene Capitalien, wenn Zeiten und Procente gleich sind? Was bedeutet das Wort Procent, und wie viel ist 6, 7, 8 Procent von 100? Womit stehen zweyerley Procente von gleichen Capitalien, auf gleiche Zeiten, in Proportion?

Wenn die Procente ungleich, und die Zeiten gleich sind, wie verhält sich denn Zinse zu Zinse? Nach welchem aus dreyen Factoren erwachsenen Producte, richtet sich jedesmal die Zinse? Wenn man die Summe unbezahlter Zinsen von vielen Jahren finden soll, wie berechnet man dieselbe am leichtesten? Versuchet auszurechnen, wie groß das Grundcapital gewesen, welches in 25 Jahren zu 5 Procent, bis an 225 Thaler angewachsen ist? Wie berechnet man Zinse auf Zinse? Welche Zahl muß man dabey zu einer Potenz erheben, und welches ist der Exponent dieser Potenz?

§. 81. Was ist der Rabatt? Wie erkennt man die relative Grösse desselben? Wie stellt man die Nahmenänderung an, wodurch das ganze Capital in das abgekürzte, oder umgekehrt verwandelt wird? Was hat das Wort Procent bey der Rechnung des Rabatts, wenn die relative Grösse dadurch bestimmt werden soll, für eine Bedeutung? Was ist die Ursache einer solchen Procentrechnung bey dem Rabatt? Wie berechnet man den ganzen Betrag des Rabatts von der ganzen Summe?

§. 82. Was ist die Reduction der Terminen? Welches ist die Grundregel dabey? Wie findet man den gemeinschaftlichen Termin zweyer nicht zu verzinsenden Capitalien, die auf verschiedene Terminen stunden? Welches ist die Grundregel bey der Reduction auf einen gemeinschaftlichen Termin, wenn von den Ca-

pitalien

pitalien verschiedentliche Procente Interesse vorhin bedungen waren? Wie reducirt man die verschiedenen Procente, verschiedener Capitalien, welche auf einerley Termin stunden, ich sage, wie reducirt man diese Procente auf einerley Procente des ganzen Capitals?

§. 83. Welche Zahlen sind bey Umsetzung der Geldsorten am meisten zu bemerken? Wie berechrechnet man das verabredete Aufgeld dabey, und zwar insonderheit wenn die Abrede nach Procenten genommen ist?

§. 84. Was ist ein Wechselbrief? Wer heißt Remittent, Trassant, Repräsentant, Acceptant? Welche Comparationszahlen sind hauptsächlich in dem Geschäfte zwischen dem Remittenten und Trassanten zu merken? Was heißt das Indossement? Bey welchen Umständen sagt man, daß der Trassant und Remittent den Wechselhandel Alpari geschlossen haben? Wie berechnet man, ob der Trassant oder Remittent bey dem Handel gewinnen? Was heißt im Wechselgeschäfte das feststehende und das veränderliche Geld? Wer verliert, wenn der Wechsel über Pari geschlossen oder verabredet ist? Und wer, wenn der Wechsel unter Pari steht oder geschlossen wird? Aus welchem Producte ist der Verlust des einen und Gewinn des andern, bey dem einfachendem Wechseltausche, nemlich zwischen dem Remittenten und Trassanten zu ermessen? Was bedeutet die Valuta? Was für ein Verhältnis der Gelder bedeutet das Wort Cours? Wann

steht der Cours niedrig oder hoch? Wer verliert in diesem und in jenem Falle? Was bedeutet es, wenn man sagt, eine Geldsorte sey um so und so viel Procent schlechter als die andern? Was ist die Wechselreduction, und was hat man dabey zu thun? Wie berechnet man Gewinn und Verlust, bey demjenigen Wechsel, wobey Anfangs Ausgabe, und hernach Einnahme, oder zuerst Einnahme, und hernach Ausgabe ist? Welche ist überhaupt die absolute Grösse des Gewinnes und Verlustes im Handel? Welche ist die relative Grösse des Gewinns, und welche die Procentalgrösse desselben? Welche ist die relative Grösse des Verlusts? Wie berechnet man die Procentalgrösse desselben? Wie verfährt man bey dem Wechselarbitrage oder bey der Wechselwahl?

§. 85. Wie findet man das Verhältniß eines Theils zum Ganzen? Wie findet man den Theil, wenn sein Verhältniß zu dem bekannten Ganzen bekannt ist? Was heißt eine proportionirliche Theilung, nach der Form der regulirenden? Wie findet man die Grösse eines solchen proportionirlichen Theiles? Wie findet man die Grösse aller Theile, auf die erste, auf die zweyte Art? Wie erleichtert man sich diese Arbeit? Was darf man ohne unverständlich zu werden, aus der Theilungsregel auslassen? Wenn das Ganze 1 ist, wie verhält sich denn ein Theil zu seinem eigenen Verhältnisse gegen das Ganze? Welches ist

die

die dritte Art, die proportionirlichen Theile zu finden? Wie ist die Theilungsregel zu verstehen, wenn die Theile solche Brüche sind, welche zusammen mehr oder weniger als 1 ausmachen? Wie wird in Commerzsachen die Theilungsregel erkannt?

Das Achte Hauptstück.

Anwendung der Reesischen Kettenregel, mit einiger Veränderung.

§. 86. u. 87. Welcher Vortheile muß sich ein Geübter im Multipliciren und Dividiren bedienen? Wie bringt man viele Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner?

§. 88. Was bedeutet die Hauptcolumne, und was hat sie für andre Nahmen? Was bedeutet die Nebencolumne, und wie nennt man sie anders? Was heißt das Resultat in der Columnenrechnung? Durch welche Aenderung in den Columnen wird das Resultat nicht geändert? Was thut man, wenn in einer der Columnen, Brüche oder unreine Zahlen vorkommen?

§. 89. Hier sind Exempel, daß Brüche und unreine Zahlen durch einander sollen multiplicirt und dividirt werden, wißt ihr es durch die Columnenrechnung zu thun? Wißt ihr auch die Productrechnung in Columnen aufzusetzen? Bey welchen Nahmenänderungen benahmter Zahlen ist die Columnenrechnung sehr vortheilhaft? Welche Zahl steht alsdann in der Hauptcolumnen oben an? Und welche Zahlen folgen alsdann zur Linken und Rech-

ten, und abermals weiter herunter zur Linken und Rechten?

§. 90. Warum ist es rathsam, bey dem Gebrauche der Columnenrechnung einen gegebenen Proportionalsatz in dem indirecten Ausdrucke zu denken? Wenn der Satz unformirt ist, hat alsdann das erste und dritte, so auch das zweyte und vierte Glied, schlechterdings keine Uebereinstimmung in dem Nahmen? Wenn man einen formirten Proportionalsatz hat, wo hat alsdann das dritte, wo das erste, wo das zweyte Glied, in der Columuenrechnung seinen Platz?

§. 91. Wie multiplicirt man zwey Columnenresultate, welche noch durch Columnen bezeichnet sind, durch einander? Wie werden sie dnrch einander dividirt? Und welches ist der Beweis dieser Regel?

§. 92 Wenn der gegebene Proportionalsatz unformirt ist, wo setzt man alsdann gleich Anfangs den Nahmen, welchen das vierte Glied haben soll? Wo setzt man das dritte Glied? Was ist alsdann zu thun, wenn das dritte Glied seinen Nahmen ändern muß? Wenn dieses geschehen oder nicht nöthig ist, wo setzt man alsdann das erste und zweyte Glied? Was ist weiter zu thun, wenn das zweyte Glied seinen Nahmen ändern muß? Wie lange muß man fortfahren den Nahmen desselben zu ändern? Was ist alsdann mit den Columnen anzufangen?

§. 93. Wie hat man das Suchen der vierten Proportionalzahl in allen Fällen anzusehen? Worinnen besteht die Reesische Kettenregel?

Einige

Einige Anmerkungen.

Seite 18 in der vierten Zeile. Man lese $Y < Z$, anstatt $Y > Z$.

S. 27. in der 12ten Zeile. Man setze nach den Worten: **Denn dadurch wird in der Hauptsumme**, nachfolgende ausgelassene Worte: **sowohl, als in dem Abzuge**.

S. 36. Im Anfange des letzten Absatzes. Wenn ich ich daselbst gesagt habe, daß $(H+N)=(H-1)+(N+10)$ so verstehe ich unter den Zahlen 1, und 10, solche Einheiten, welche ihre Bedeutung auch von der Stelle in der Decimalordnung bekommen, z. E. 1 in der Stelle T ist 1000. Und 10 in der Stelle H ist 10×100.

S. 64. Die Wahrheit, welche §. 41. gelehret worden, wird noch deutlicher durch folgendes: Eine jede mit Nullen begleitete Zahl ist anzusehen, als ein Product aus einer Zahl und aus einer gewissen Rangeinheit, z. E. $4500 = 45 \times 100$ und $33000 = 33 \times 1000$. Wenn man also 4500 durch 33000 multipliciren soll, so soll man multipliciren $45 \times 100 \times 33 \times 1000$, oder (weil die Versetzung der Factoren, wie unten erwiesen wird, das Resultat nicht ändert,) so soll man machen das Product $45 \times 33 \times (100 \times 1000)$ oder $45 \times 33 \times (100000)$, oder 45×33 mit so vielen angehängten Nullen, als die Rangeinheit (100000) hat. Und dieses ist in allen Fällen eben so wahr, der Nullen mögen wenig, oder viel seyn.

S. 66. Zu §. 44. Der Beweis ist für Anfänger alsdann nicht gar zu schwer, wenn sie gnug gewöhnt sind, den Zeichen ihre Bedeutung zu geben, und wenn man nicht auf einmal auf eine ermüdende Art, sondern an verschiedenen Tagen die einzelnen Sätze, welche in diesem und den folgenden Paragraphen vorkommen, beweiset, und mit Exempeln durch Zahlen erläutert.

S. 72. zu §. 46. Die sogenannte Universalausübung der Addition, Subtraction, Multiplication und Division, kömmt in den Rechnungen des gemeinen Lebens sehr wenig vor. Ein eilender oder schwacher Schüler mag sie übergehen. Aber sie schärft sehr den Verstand zur arithmetischen Einsicht. Doch würde ich sie vielleicht in diesem Buche weggelassen haben, wenn ich nicht Anfangs willens gewesen wäre, die reine Zahlen-Algebra zugleich abzuhandeln.

S. 86. zu dem zweyten und dritten Absatze. Die hier verlangte Aenderung der Zahlen in Brüche, und der Brüche in Zahlen, ist eine Art Rechnung, welche ich weiter unten die **Nahmenänderung der benahmten Zahlen** nenne, nemlich eine der Comparationszahlen, welche man beyde wissen muß. Um die Nahmenänderung anzustellen, ist, wenn man kleinere Einheiten in einen Theil oder Bruch von der grössern Principaleinheit, oder einen Bruch von der grössern Principaleinheit in eine Zahl kleinerer Einheiten verwandeln will, allemal die Zahl 1, z. E. 1 Rthlr. ist 24 Groschen. Und 1 Schifpf. ist 280 Pfund. Da nun der Nenner anzeigt, wie

viel

viel solche kleinere Einheiten, als in dem Zähler gezählt werden, eine einzige Principaleinheit ausmachen; so ist kein Zweifel, daß eine, durch einen solchen Nenner dividirte, Zahl kleinerer Einheiten, nach dieser Division, von der grössern Principaleinheit zu benahmen sey. Denn jede Einheit des Zählers wird alsdann für einen solchen Theil der Principaleinheit angesehen, als sie wirklich ist, z. E. wenn ich 18 Groschen als $\frac{18}{24}$ Thaler schreibe; so wird jeder Groschen als $\frac{1}{24}$ Thaler angesehen. Der Inhalt der Worte in dem letzten Absatze: **so hat auch jeder Theil der Principaleinheit so viele gleichbenahmte Theile der kleinern Einheiten;** wird vielleicht durch folgenden Vortrag einigen Lesern verständlicher. Ein Bruch von einer Principaleinheit, wenn er multiplicirt wird durch die Zahl, welche die in der Principaleinheit enthaltenen kleinern Einheiten anzeigt, wird ein solches Product, wodurch derselbe Wehrt, derselbe vorige Inhalt (aber unter dem Nahmen der kleinern Einheit) angedeutet wird, z. E. $\frac{3}{4}$ Louisdor ist $\frac{3}{4} \times 5$ oder $\frac{15}{4}$ $3\frac{3}{4}$ Thlr. wenn 1 Louisdor so viel gilt als 5 Thlr. denn die grössere Einheit, wovon der Bruch, der $\frac{A}{B}$ seyn mag, berechnet ist, heisse E, die kleinere Einheit heisse e. Die Zahl, weche anzeigt, wie viel e in einem einzigen E enthalten sind, heisse Z. So ist $E = Ze$. Folglich $\frac{A}{B} \times E = \frac{A}{E} \times (Z \times e)$. Diese Lehre wird wegen ihrer Wichtigkeit noch oft wieder vorkommen.

S. 111. §. 62. Die verschiedenen benahmten Zahlen, davon

davon eine der andern am Wehrte gleich ist, nenne ich in den folgenden Theilen der Unterweisung, Comparationszahlen, und ein Satz, worinnen Comparationszahlen gelehret werden, heißt ein Comparationssatz. Es sind also die in diesem Abschnitte vorkommende Sätze lauter Comparationssätze. Es giebt aber viele Comparationssätze, in welchen keine der beyden Zahlen die Zahl 1 ist, z. E. 5 Brabander Ellen sind 6 Hamburgische.

S. 128. zu den 66. 67. und 68. Paragraphen. Es liessen sich diese Abhandlungen von der arithmetischen Proportion und Progreßion in der Rechenkunst des bürgerlichen Lebens entbehren. Aber, sie sind doch in derselben nicht ganz ohne Nutzen, und geben eine gute Vorbereitung zu der unentbehrlichen Lehre von der geometrischen Proportion.

Register,

worinnen die Zahl der Seiten angedeutet wird.

A.

Abzug — — 20 u. f.
Acceptant — — — 198
Addiren, Summe, Nebentheil, Additionszeichen, 15 u. f.
Ausübung der Addition — 39 u. f.
Vorbereitung zur Addition — — 39 u. f.
Addition solcher Zahlen die sich mit Nullen endigen 43
Harmonische Addition — 43
Addition benahmter Zahlen — — 119
Wann Zahlen zu addiren seyn — 151
Algebraisch ausgedrückte Zahl — 25
Arithmetisch Verhältniß, Proportion, Proportionalglied — — 129 u. f.
Hauptsätze von arithmetischen Proportionen und Progreßionen 130-134 auch 136 u. f.
Aufgehen der Zahlen durcheinander 101 u. f.
Aufgeld besonders in Procenten — 196 u. f.
Ausnehmen oder relativisch multipliciren 109 u. 125

B.

Benahmung der Zahlen, siehe Zahlwürde.
Bruch, gebrochene Einheit, Nenner, Zähler, 4 5 20
Grundsätze von Brüchen — 78
Addition und Subtraction der Brüche 78 u. f.
Multiplication des Bruchs — 78 u. 81
Bruch ist gleich einem Quotienten — 79

Durch

Durch welche Aenderung der Wehrt des Bruchs nicht geändert werde — 81
Brüche unter einen Nenner bringen 82 u. 216
Multiplication mit Brüchen — 84 u. 87
Veränderung der Brüche in Integralzahlen 86
Einrichtung einer Integralzahl zu einem Bruche 87
Division in der Bruchrechnung — 89
Brüche verkleinert ausdrücken — — 105
Brutto —— —— 183
Buchstaben ihr Gebrauch in der Rechenkunst 12 14 18

C.

Columnenrechnung, oder nach der Reesischen Regel —— —— 218
Hauptcolumne, Multiplicationscolumne, Hauptclasse — — 218
Nebencolumne, Divisionscolumne, Nebenclasse 218
Resultat der Columnenrechnung — 219
Columnen stellen Brüche vor —— 219
Wie man Columnen ändert, ohne Aenderung des Resultats —— — 219
Wie man mit Brüchen und unreinen Zahlen in Columnen verfahren müsse — 222
Wie diese Columnenrechnung zur Multiplication und Division der Brüche diene 224
Wie sie in der Productrechnung diene 224
Von der Proportionalrechnung und der Reesischen Regel in Columnen — 225 u. f.
Comparationssätze, eine Kette derselben, welche zur Nahmenänderung zureicht 175 u. 176
Comparationszahl, gleichnahmige und ungleichnahmige —— —— 117 u. f.
Cours, verabredeter, niedriger, hoher — 293

Cubik=

Cubikzahl und Cubikwurzel, siehe Potenz und Wurzel

D.

Decimalordnung — — 32 u. f.
Differenz — — 20 u. f.
Dignität, siehe Potenz.
Directe und indirecte Proportion — 171
Dividiren, Dividendum, Divisor, Quotient 75
Grundsätze vom Dividiren — 76-80
Was zu thun sey, wenn das Dividendum kleiner ist als der Divisor — — 85
Division mit grossen Zahlen — 92
Division benahmter Zahlen — 123 u. f.
Wann man dividiren müsse — — 154
Division ist eine Anwendung der Regel Detri 157
Division durch ein in seine Factoren zerfälltes Product — — 216
Divisionscolumne, siehe Columne.
Doppelglied ist die mittlere Proportionalzahl.

E.

Einheit, grössere und kleinere Einheiten, Zahl, die eine Einheit ist, Principaleinheit — 1-4
Gebrochene Einheit, siehe Bruch.
Einmal Eins — — 55

F.

Factor, Hauptfactor, Nebenfactor — 53
Formirter und unformirter Proportionalsatz 171

G.

Ganzes und Theile, Grundsätze davon — 6

Gemäß setzen eine Zahl der andern, ist multipliciren — — 52 u. f.
Geometrische Proportion, Proportionalglied, Verhältniß, Proportionalzahl, Progreßion, Progreßionsglied, Doppelglied — 141 u. f.
Hauptsätze von Proportionen — 142-151
Versetzung und Veränderung der Proportionalglieder — — 148 u. 158
Wie man das unbekannte Glied in der Proportion finde — — 159 u. 160
Singulaire und gewöhnliche Proportionen 160 u. 161
Worauf sich die Proportion gründet — 169
Welcher Glieder gleiche Benahmung in Proportionalsätzen vorausgesetzt werde — 170
Directe und indirecte Proportion — 171
Wie es mit der Benennung und Nahmenänderung der Glieder zu halten sey — 172
Geometrische harmonische Veränderung — 145
Gewinn und Verlust, relative Größe desselben 206
Bey dem Wechselhandel — 206
Des Trassanten und Remittenten — 200-204
Gleichheit, Grundsätze und Zeichen davon 14 u. f.
Gleichartige Dinge — — 114
Gold- und Silberrechnung — 177
Grösse, vergleichbare Grösse — — 2
Grundsatz — — 5

H.

Harmonisch gesetzte Paare von Zahlen — 129
Harmonische Addition, siehe Addition.
Harmonische geom. Veränderung — 145
Hauptcolumne, Hauptclasse, siehe Columne.

Hauptzahl — — — 44
Hauptfactor — — — 53
Hauptsumme — — 20 u. f.

J.

Indirecte Proportion — — — 171
Indossement — — 199
Integralzahl — — — 7
Interesse — — — 185 u. f.

K.

Kubic, siehe Potenz.
Kettenregel, siehe Columne.

L.

Loth, Löthigkeit, oder Feinheit in der Gold- und Silberrechnung — — 178

M.

Maaß, gemeinschaftlich und größtes Maaß zweyer Zahlen — — 103
Mark, Markfein — — 177 178
Million, Trillion, u. s. w. — 34
Minus, siehe Subtraction.
Multiplication — — — 53
Ausübung derselben — 54-65
Grundsätze davon — — 65
Absolute und relative Multiplication — 108
Multiplication benahmter Zahlen — 120
Wann man multipliciren müsse — — 153
Multiplication ist eine Anwendung der Regel Detri — — — 157

Multiplicationscolumne, siehe Columne.
Multiplication durch ein in seine Factoren zerstreutes Product — — 216

N.

Nahmenänderung und Regel derselben 114 u. f.
Nebenclasse, Nebencolumne, siehe Columne.
Nebenfactor — — 53
Nebentheile — — — 15
Nebenzahl — — — 44
Negative Theile oder Zahlen — 25

P.

Pariverhältniß, über Pari, unter Pari 200-202
Plus — — 15 u. f.
Positive Theile oder Zahlen — 25
Principaleinheit — — 4
Potenz oder Dignität, erste, zweyte, dritte, u. s. w. Quadratzahl, Cubiczahl 134 u. f.
Procent, siehe Zinse, Rabatt, Thara, Gewinn und Verlust. Procent besser oder schlechter 204
Product — — — 53
Productrechnung und wo sie anzuwenden 164 u. f.
Productrechnung durch Columnen — 224
Progreßion und Proportion, siehe Arithmetisch und Geometrisch.
Proportionalsatz, formirt und unformirt 171

Q.

Quadrat, siehe Potenz und Wurzel.
Quotient — — — 75

R.

Rabattrechnung, relative Grösse des Rabatts,

welche

welche Comparationszahlen dabey zu mer- ken, was Procent dabey bedeute — 188 u. f.
Rangeinheit und Rangzahl — 59 u. 61
Regel Detri — — 144
Verkehrte — — — 162
Reesische Regel, siehe Columne.
Regelmäßige Untersetzung des Divisors — 94
Remittent — — 198
Repräsentant — — 198
Resultat der Columnenrechnung, siehe Columne.

S.

Subtraction und ihre Grundsätze — 20 u. f.
Ausübung derselben — — 46
In benahmten Zahlen — 119
Wann man subtrahiren müsse — — 152
Subordination der Theile des Factors — 108

T.

Terminenreduction, Grundregel — 191 u. f.
Thara, relative Grösse, Bedeutung der Abrede in Comparationszahlen und Procenten 183 u. f.
Theilrechnung, nach Proportionsregeln 208 u. f.
Trassant — — — 198

U.

Umsetzung der Geldsorten — — 198
Universal-Addition — — 24
Subtraction — — — 26
Multiplication — — — 72
Division — — — 105
Unreine Integralzahlen — — 22

V.

V.

Valuta, feststehende und veränderliche — 203
Viceziffer — — — 33

W.

Wechsel, Umsetzung der Geldsorten — 198
Wechselbrief — 198
Welche Comparationszahlen dabey zu bemerken 198
Wechselreduction, Wechselarbitrage 205-207
Wurzel, erste, zweyte, dritte; Quadratwurzel, Cubicwurzel — — 134 u. f.

Z.

Zahl, ob Eins eine Zahl sey — 2
Benahmte und unbenahmte Zahlen — 7 8
Integralzahlen — — 7
Zahlwürde — — — 10 u. 11
Zerstreuung des Factors — 107 u. 125
Zinserechnung — — 185-187

Basedow, Johann Bernhard,

Ueberzeugende Methode der auf das bürgerliche Leben angewendeten Arithmetik zum Vergnügen der Nachdenkenden und zur Beförderung des guten Unterrichts in den Schulen

Altona 1763

Math.p. 25
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081423-0
VD18 15293181